COURS D'ASTRONOMIE

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS D'ASTRONOMIE

PAR

H. ANDOYER

PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE THÉORIQUE

Troisième édition entièrement refondue

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1923

AVERTISSEMENT

Cette nouvelle édition de la première partie de mon *Cours d'Astronomie* diffère notablement des précédentes, dont le plan général a été cependant conservé. J'ai apporté de nombreux perfectionnements de détail, suggérés par l'expérience de l'enseignement, et j'ai complètement modifié l'exposition de la théorie de la précession, comme aussi celle de la théorie générale des éclipses. En outre, j'ai transporté ici le Chapitre complémentaire consacré précédemment dans le second volume au problème de la détermination d'une orbite képlérienne par trois observations rapprochées, et j'ai donné de ce problème une solution toute différente. Enfin, j'ai terminé le volume par une note sur le calendrier, qui m'a paru susceptible d'intéresser de nombreux lecteurs.

M. A. Lambert a bien voulu m'aider à revoir les épreuves : je suis heureux de lui dire ici, ainsi qu'à M. J. Hermann, toute mon affectueuse reconnaissance.

Paris, le 11 Novembre 1922.

H. ANDOYER.

COURS D'ASTRONOMIE

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE THÉORIQUE

L'objet propre de ce Cours est l'étude des phénomènes célestes *apparents*, c'est-à-dire tels que nous les voyons. Savoir déterminer dans quelle direction se trouve un astre donné et quelles apparences il offre, à un instant donné et dans un lieu donné, tel est l'énoncé général du problème dont nous poursuivrons la solution, laissant systématiquement de côté tout ce qui concerne la constitution physique des astres, ainsi que l'histoire de l'Astronomie.

Nous accepterons les notions habituelles de temps et d'espace absolus, telles qu'on les accepte en Mécanique rationnelle ; nous supposerons connus les mouvements des différents astres qui constituent l'Univers, tels que nous les enseigne la Mécanique céleste, fondée sur le principe de la gravitation universelle. Enfin nous nous appuierons, toutes les fois qu'il sera nécessaire, sur les théories physiques proprement dites.

Toutes les données nécessaires pour la résolution pratique du problème général que nous nous sommes posé sont contenues dans la *Connaissance des Temps*, qui est un recueil d'éphémérides publié chaque année par le Bureau des Longitudes. La *Connaissance des Temps* est un instrument indispensable dont il faut savoir se servir, et son usage est un point capital qui retiendra toute notre attention, en même temps que le développement des théories astronomiques.

Les principaux recueils d'éphémérides analogues à la *Connaissance des Temps*, et publiés à l'étranger, sont :

Le *Nautical Almanac*, en Angleterre ;

L'*American Ephemeris*, aux Etats-Unis ;

Le *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, en Allemagne.

Ce Cours est divisé en quatre Livres. Dans le premier, nous développerons un certain nombre de théories analytiques qui ne sont pas particulières à l'Astronomie, mais qui lui sont indispensables ; au premier rang vient la Trigonométrie sphérique, qui, de même que les théories suivantes, sera étudiée spécialement au point de vue des applications que nous devons en faire. Dans le Livre II, nous nous occuperons de la Terre, et des corrections qu'il faut faire subir aux observations pour les rendre comparables, en raison des causes physiques terrestres qui les altèrent.

Dans le Livre III, nous étudierons les mouvements des divers astres, et aussi les corrections qu'il faut encore appliquer aux observations, en vertu des déplacements des plans fondamentaux. Enfin le Livre IV sera consacré à la théorie générale des éclipses.

Un Chapitre complémentaire est consacré à la détermination d'une orbite képlérienne par trois observations rapprochées ; et une note sur le calendrier termine le volume.

Notre intention n'est d'ailleurs pas d'embrasser toute l'Astronomie, ni même d'épuiser les sujets traités ; mais cependant d'entrer dans des détails suffisants pour initier le lecteur aux méthodes générales de l'Astronomie véritable, sans rien dissimuler des développements toujours un peu minutieux qu'elles exigent.

LIVRE PREMIER

THÉORIES ANALYTIQUES

CHAPITRE PREMIER

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

L'étude analytique de la géométrie des directions issues d'un même point O a une importance capitale en Astronomie.

Décrivons une sphère de rayon quelconque autour du point O comme centre (*fig.* 1) : ce sera la *sphère céleste* de centre O. Une direction quelconque OS, issue de O, coupe cette sphère en un point A ; et réciproquement chaque point A de la sphère définit une direction issue de O, celle du vecteur $\overline{OA}$. Nous sommes donc amenés à étudier analytiquement les figures sphériques, c'est-à-dire à la *Trigonométrie sphérique*.

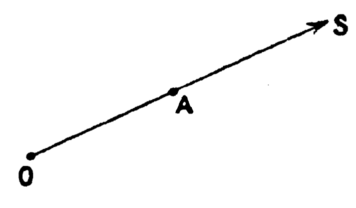


Fig. 1

Triangle sphérique. — Soient A, B, C trois points quelconques d'une sphère dont le rayon sera pris comme unité de longueur. Joignons ces points deux à deux par des arcs de grand cercle quelconques, pouvant dépasser la longueur d'un grand cercle, si l'on veut. On forme ainsi une figure que nous nommerons d'une façon générale un *triangle sphérique*. Les *côtés* de ce triangle *a*, *b*, *c* seront respectivement les longueurs des arcs tracés BC, CA, AB, prises positivement ou négativement, et cela comme on voudra, pour chacune.

Choisissons maintenant, pour un observateur placé suivant un rayon de la sphère, les pieds au centre O, la tête à l'infini, de façon qu'il regarde la surface extérieure de la sphère (et nous dessinerons *toujours* les figures sphériques comme vues ainsi *extérieurement*), un sens de rotation arbitraire, mais qui restera le même pour un triangle déterminé, et plus généralement durant tout le cours d'une même question.

L'*angle* A du triangle sphérique ABC est alors l'un quelconque des angles que l'on décrit, dans le sens choisi, pour amener le côté AC tracé, ou son prolongement (suivant que b est positif ou négatif), sur le côté tracé AB, ou son prolongement (suivant que c est positif ou négatif). Les angles B et C du triangle sont définis de la même façon en permutant circulairement les lettres A, B, C, dans la définition de l'angle A.

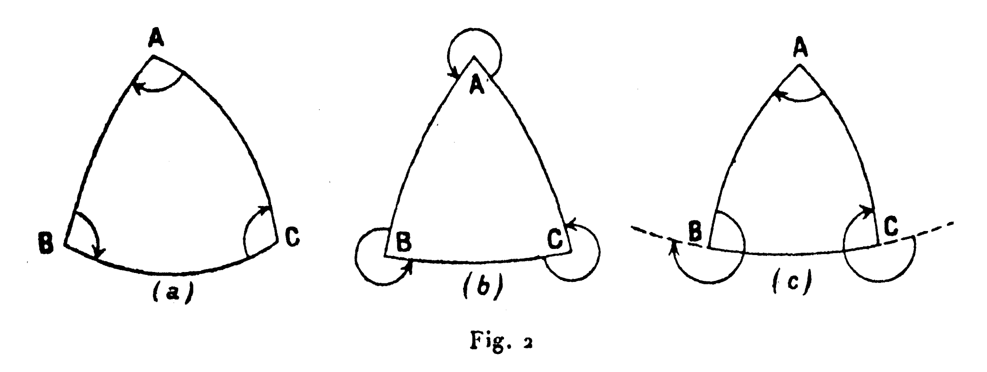


Fig. 2

Les figures 2(a) et 2(b) représentent des triangles sphériques à côté positifs : quand on passe de l'une à l'autre, le sens de rotation choisi pour compter les angles change. La figure 2(c) représente un triangle dont le côté a est négatif, les deux autres étant positifs.

En faisant abstraction des multiples positifs ou négatifs de 2π dont on peut toujours modifier un côté ou un angle, on voit que trois points A, B, C déterminent huit triangles sphériques différents dont chacun a deux systèmes d'éléments. En effet :

1° On peut changer tous les angles de signe, en changeant le sens choisi pour les définir ;

2° On peut changer le signe d'un côté a, à la condition d'augmenter de π les angles adjacents B et C.

Ces propriétés sont en évidence sur les figures 2.

3° On peut ensuite combiner ensemble ces transformations de telle façon qu'on voudra, et passer ainsi de l'un quelconque des triangles ABC à tous les autres.

Parmi les triangles déterminés par trois points A, B, C il en est toujours un dont les côtés et les angles sont positifs et inférieurs à π : les triangles de cette nature, que nous appellerons *simples*, sont les seuls que l'on considère en géométrie sphérique élémentaire. Le triangle simple ABC a respectivement pour côtés et pour angles les faces et les dièdres du trièdre correspondant OABC, ayant son sommet au centre O de la sphère.

La considération des triangles sphériques simples est insuffisante pour donner aux formules de la Trigonométrie sphérique toute leur signification, et spécialement pour les besoins de l'Astronomie.

Relations fondamentales, ou du premier ordre, entre les éléments d'un triangle sphérique. — Les *éléments* d'un triangle sphérique sont ses trois côtés a, b, c, et ses trois angles A, B, C. Il est évident géométriquement que trois quelconques de ces éléments déterminent les trois autres, peut-être avec une certaine ambiguïté.

Donc, entre quatre éléments quelconques d'un triangle sphérique existe une relation et une seule, susceptible à la vérité de prendre plusieurs formes très différentes. Le nombre de ces relations fondamentales est manifestement égal au nombre des combinaisons simples de 6 quantités 4 à 4, soit 15. Elles sont de quatre types différents, savoir :

1° trois entre les trois côtés et un angle ;

2° trois entre les trois angles et un côté ;

3° trois entre deux côtés et les deux angles opposés ;

4° six entre deux côtés, l'angle compris, et l'angle opposé à l'un d'eux.

Il est clair encore que ces relations ne sauraient être distinctes analytiquement qu'au nombre de trois.

Entre cinq éléments d'un triangle sphérique, ou entre ses six éléments, on peut trouver une infinité de relations : ce qui

suit nous fournira celles qui sont utiles, ou simplement intéressantes.

Pour procéder à la recherche des relations fondamentales entre les éléments d'un triangle sphérique, nous nous appuierons sur la formule élémentaire de géométrique analytique qui donne le cosinus de l'angle V de deux directions, soit

$$\cos V = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

en appelant α, β, γ d'une part, α', β', γ' d'autre part, les cosinus des angles que font ces directions avec trois axes rectangulaires.

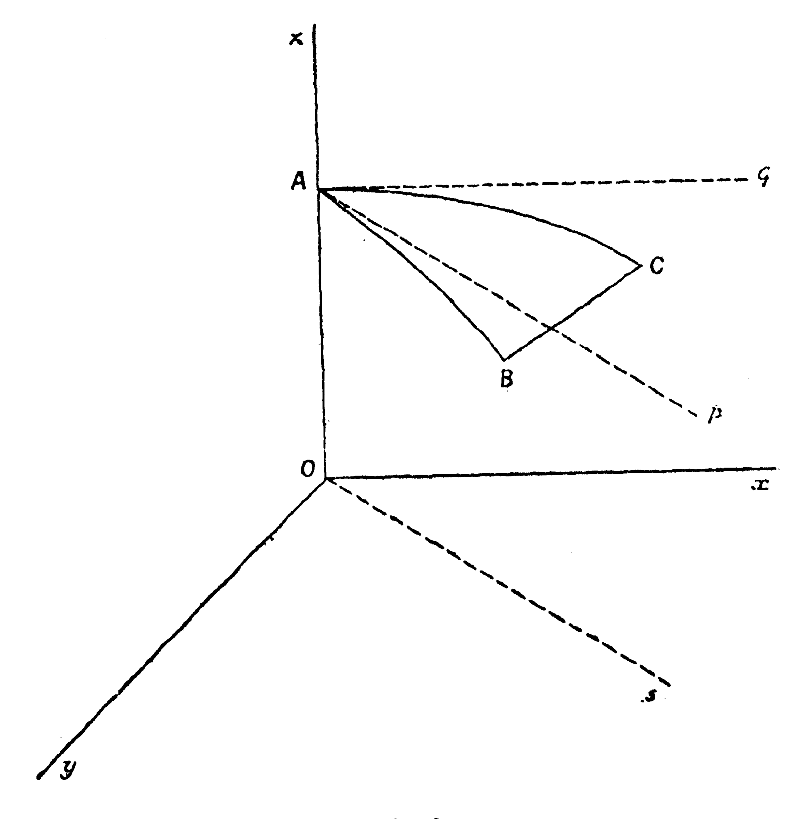


Fig. 3

Le triangle ABC étant tracé sur une sphère de centre O dont le rayon est pris pour unité de longueur, faisons-lui correspondre un système d'axes rectangulaires de la façon suivante (*fig.* 3).

L'axe Oz coïncide avec OA; l'axe Ox est parallèle à la tangente Aq menée en A à l'arc AC, et orientée dans le sens même de cet arc, ou dans le sens contraire, suivant que le côté AC

c'est-à-dire b, est positif ou négatif; enfin l'axe Oy est tel que l'angle xOy, compté par un observateur placé suivant Oz dans le sens choisi pour définir les angles du triangle ABC, soit égal à $+\frac{\pi}{2}$; soit de plus, dans le plan Oxy, un axe Os parallèle à la tangente Ap menée en A à l'arc AB, et orientée suivant la même règle que Aq.

Le vecteur $\overline{OC}$ est situé dans le plan Oxz, et ses projections sur Ox, Oz sont manifestement égales à $\sin b$, $\cos b$, de sorte que ses cosinus directeurs par rapport au système $Oxyz$ sont

$$\sin b, \qquad 0, \qquad \cos b.$$

Le vecteur $\overline{OB}$ est situé dans le plan Osz, et ses projections sur Os, Oz sont de même égales à $\sin c$, $\cos c$; d'ailleurs l'angle xOs est égal à l'angle A du triangle, de sorte que les cosinus directeurs de $\overline{OB}$ sont

$$\sin c \cos A, \qquad \sin c \sin A, \qquad \cos c.$$

Le cosinus de l'angle des directions OB, OC est égal au cosinus du côté a du triangle ABC; il vient donc, d'après la formule rappelée ci-dessus,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Permutant circulairement les lettres, on a ainsi un premier groupe de formules fondamentales :

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{array} \right.$$

Ce sont les relations du premier type, entre les trois côtés et un angle.

Ces trois formules, essentiellement distinctes, contiennent en germe toute la Trigonométrie sphérique; toutefois, il est évident *a priori* que, pour les faire correspondre exactement à la définition donnée d'un triangle sphérique, il faudra leur adjoindre une condition supplémentaire qui limite leur généralité, car, en les établissant, on n'a pas tenu compte des conventions faites pour compter les angles tous dans le même

sens : en d'autres termes, comme les angles A, B, C, n'y figurent que par leurs cosinus, les signes de ces angles y restent tous arbitraires, tandis qu'en réalité ils ne sont arbitraires que dans leur ensemble.

Pour compléter les relations précédentes, envisageons donc maintenant les sinus des angles A, B, C. De la première formule (I), on tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

et par suite

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c};$$

posant donc

$$D = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c,$$

et remarquant que cette quantité est symétrique par rapport à a, b, c, on a

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = \frac{D}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Ceci nous montre que les rapports $\frac{\sin A}{\sin a}$, $\frac{\sin B}{\sin b}$, $\frac{\sin C}{\sin c}$ des sinus d'un angle et du côté opposé, sont égaux en valeur absolue, et c'est tout ce que les formules (I) peuvent nous fournir. Observons alors que dans un triangle simple ces rapports sont tous positifs, puis qu'ils changent tous de signe soit quand on change tous les angles de signe, soit quand on change le signe d'un côté en même temps que l'on augmente de π les deux angles adjacents ; nous en concluons, d'après ce qui a été dit plus haut, que l'on a toujours exactement

$$\text{(III)} \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

la valeur commune de ces rapports peut être prise égale à $\frac{\sqrt{D}}{\sin a \sin b \sin c}$, et ceci suffit pour préciser une fois pour toutes

la détermination du radical $\sqrt{D}$, qui n'est pas nécessairement positif.

En égalant les rapports (III) deux à deux, on obtient les trois relations fondamentales du troisième type, entre deux côtés et les deux angles opposés ; on peut encore les écrire sous la forme

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

par exemple.

Ces relations ne sont distinctes qu'au nombre de deux. En les adjoignant aux relations (I), elles en restreignent la généralité, de telle façon que l'ensemble ainsi formé correspond exactement à la définition que nous avons donnée du triangle sphérique, sans qu'il soit nécessaire, si l'on veut, d'y rien ajouter, mais sans qu'il soit possible d'en rien retrancher.

Les formules (I) et (III), comme celles qu'il nous reste à établir dans ce paragraphe, ne contiennent, rationnellement d'ailleurs, que les lignes trigonométriques des éléments eux-mêmes d'un triangle, et non celles des multiples (entiers ou fractionnaires) de ces éléments : c'est pour cette raison que nous les qualifions de relations du *premier ordre*.

Poursuivant la recherche des relations fondamentales, formons maintenant celle qui existe entre les éléments b, c, A, B : il faut, à cet effet, éliminer a et C dans les formules (I) et (III). Eliminant donc $\cos a$ entre les deux premières équations (I), il vient d'abord

$$\cos b(1 - \cos^2 c) = \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin c \sin a \cos B,$$

ou bien, en divisant les deux membres par $\sin c$:

$$\text{(V)} \qquad \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $\sin a$ par sa valeur $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$, tirée des équations (III), pour obtenir la relation cherchée

$$\sin A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} b - \cos c \cos A.$$

Permutant les lettres, on a l'ensemble des six relations fondamentales du quatrième type entre deux côtés, l'angle compris

et l'angle opposé à l'un d'eux,

$$(\text{IV})\quad \left\{\begin{aligned} \cos a \cos B &= \sin a \operatorname{cotg} c - \sin B \operatorname{cotg} C,\\ \cos a \cos C &= \sin a \operatorname{cotg} b - \sin C \operatorname{cotg} B,\\ \cos b \cos C &= \sin b \operatorname{cotg} a - \sin C \operatorname{cotg} A,\\ \cos b \cos A &= \sin b \operatorname{cotg} c - \sin A \operatorname{cotg} C,\\ \cos c \cos A &= \sin c \operatorname{cotg} b - \sin A \operatorname{cotg} B,\\ \cos c \cos B &= \sin c \operatorname{cotg} a - \sin B \operatorname{cotg} A. \end{aligned}\right.$$

Pour former enfin la relation qui existe entre les éléments a, A, B, C, il faut éliminer b et c dans les formules (I) et (III). Eliminant d'abord $\cos c$ entre la première des équations (I) et chacune des deux autres, on a comme ci-dessus les deux relations analogues à (V) :

$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \sin a \cos b \cos C,$$
$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \sin b \cos a \cos C,$$

d'où l'on tire, par élimination de $\cos b$,

$$\sin c (\cos A + \cos B \cos C) = \sin b \cos a \sin^2 C;$$

remplaçant alors $\sin b \sin C$ par la valeur égale $\sin c \sin B$, on obtient la relation cherchée

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a.$$

Permutant les lettres, on a l'ensemble des relations fondamentales du deuxième type entre les trois angles et un côté :

$$(\text{II})\quad \left\{\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,\\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b,\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned}\right.$$

En traitant ces équations (II) comme nous avons traité les équations analogues (I), nous retrouverions les équations (III) sous la forme

$$(\text{III}')\quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

et en posant

$$D' = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

la valeur commune de chacun des rapports précédents peut être

prise égale à $\frac{\sqrt{D'}}{\sin A \sin B \sin C}$, la détermination du radical $\sqrt{D'}$ étant fixée par là même.

La comparaison des équations (III) et (III') conduit par suite à la relation

$$\text{(VII)} \qquad \sin a \sin b \sin c \sin A \sin B \sin C = \sqrt{D} \cdot \sqrt{D'}$$

entre les six éléments; elle montre encore sans peine que la valeur commune des rapports (III') est égale à $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{D'}}$.

La formule (V) qui établit une relation entre cinq éléments, savoir les trois côtés et deux angles, est d'une grande importance; en y remplaçant $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ par les quantités proportionnelles $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, elle devient, après permutation convenable des lettres,

$$\text{(VI)} \qquad \sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a,$$

et établit une relation entre les trois angles et deux côtés.

Il est manifeste que toutes les formules que nous venons d'obtenir sont invariantes par rapport aux transformations considérées à la fin du paragraphe précédent ($\sqrt{D}$ et $\sqrt{D'}$ pouvant toutefois changer de signe). Mais d'autres transformations encore sont en évidence qui n'altèrent pas nos formules prises soit individuellement, soit dans leur ensemble.

On voit en effet d'abord que l'on peut changer b, c, B, C simultanément en $\pi - b$, $\pi - c$, $\pi - B$, $\pi - C$, sans qu'aucune des formules établies cesse de subsister. Cette transformation, que nous désignerons par S, de même que les deux autres analogues que l'on en déduit par permutation des lettres, revient manifestement à remplacer le triangle ABC par le triangle A'BC, A' étant le point symétrique de A par rapport au centre O de la sphère (*fig.* 4).

En second lieu on constate sans peine dans l'ensemble de nos formules une certaine corrélation entre les côtés et les angles : d'une façon plus précise, on voit que si l'on effectue la transformation T qui consiste à remplacer a, b, c, A, B, C par $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, respectivement :

1° Les formules (I) et (II) s'échangent entre elles, de même que les formules du type (V) s'échangent avec celles du type (VI) ; D et D' aussi s'échangent, et même $\sqrt{D}$ et $\sqrt{D'}$;

2° Les formules (III) subsistent, ou plus exactement, les systèmes (III) et (III') s'échangent ; de même la relation (VII) subsiste ; enfin, les différentes relations (IV) s'échangent entre elles.

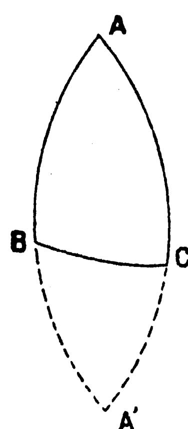


Fig. 4

Si le triangle ABC est simple, la transformation T n'a d'autre effet que de le remplacer par son *triangle polaire*, tel qu'on le définit en géométrie élémentaire ; ou encore de remplacer le trièdre OABC par le trièdre supplémentaire.

En joignant aux transformations S et T celles qui ont été définies antérieurement, et en outre toutes les permutations des trois groupes de lettres a, A ; b, B ; c, C ; puis composant toutes ces transformations de telle façon qu'on voudra, on a l'ensemble des transformations entre les six éléments a, b, c, A, B, C pour lesquelles l'ensemble des formules de la Trigonométrie sphérique est invariant.

Triangles rectangles. — Un triangle rectangle est celui dans lequel un angle A est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Ici, A mis de côté, deux éléments déterminent les trois autres, et par suite, il existe dix relations fondamentales entre les cinq éléments a, b, c, B, C pris trois à trois. Ce sont les dix relations qui contiennent A, parmi les quinze relations fondamentales (I), (II), (III), (IV). On peut les écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C,\\ \sin b = \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} C,\\ \sin c = \sin a \sin C = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} B,\\ \cos B = \cos b \sin C = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} c,\\ \cos C = \cos c \sin B = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b.\end{array}\right.$$

Pour retrouver ces formules, on peut appliquer la règle mnémonique suivante due à Néper : sur les côtés d'un penta-

gone, écrivons successivement les éléments a, B, $\frac{\pi}{2} - c$, $\frac{\pi}{2} - b$, C, comme le montre la figure (*fig.* 5) ; dans ces conditions :

Le cosinus d'un côté quelconque du pentagone est égal :

1° Au produit des sinus des deux côtés opposés ;

2° Au produit des cotangentes des deux côtés adjacents.

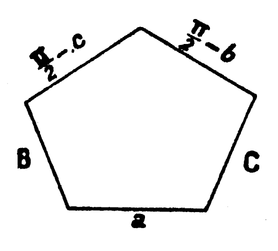


Fig. 5

Au surplus, on peut appliquer aux triangles rectangles tout ce qui a été dit, et tout ce que nous dirons sur les triangles quelconques, en faisant $A = \frac{\pi}{2}$.

On traiterait de la même façon les triangles rectilatères, dans lesquels un côté a est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Il est inutile d'écrire les formules correspondantes ; elles se déduisent des précédentes par application de la transformation T.

Relations du second ordre. — Les relations du *second ordre* entre les éléments d'un triangle sphérique sont celles où figurent les lignes trigonométriques des moitiés des éléments. Leur importance est due surtout à la facilité qu'elles offrent pour le calcul logarithmique.

Nous avons déjà vu que

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

par suite :

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = \frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c},$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b \sin c};$$

comme d'autre part

$$\sin^2 A = 4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{D}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

nous voyons d'abord que

$$D = 4 \sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2},$$

identité facile à démontrer directement.

En posant $a+b+c=2p$, de sorte que $b+c-a=2(p-a)$, nous ferons

$$G = \sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c),$$

et nous prendrons $\sqrt{G}$ avec le même signe que $\sqrt{D}$, de sorte que $\sqrt{D} = 2\sqrt{G}$. Alors

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}, \qquad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

avec

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{G}}{\sin b \sin c}.$$

On en déduit

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)},$$

et d'une façon plus précise

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{G}}{\sin p \sin(p-a)},$$

puisque

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}.$$

On voit que le signe de $\sqrt{G}$ étant fixé par le choix fait des éléments du triangle, à des multiples de 2π près, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ est déterminée sans ambiguïté ; et en effet, la fonction $\operatorname{tg} x$ a pour période π. Il n'en est pas de même pour $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ qui changent de signe quand on augmente A d'un multiple impair de 2π.

Faisons sur les formules précédentes la transformation T ; en désignant par σ l'*excès sphérique* du triangle ABC,

$$\sigma = A + B + C - \pi,$$

et en posant

$$G' = \sin\frac{\sigma}{2}\sin\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\sigma}{2}\right),$$

on voit d'abord que

$$\sqrt{D'} = 2\sqrt{G'},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}\sin\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin B\sin C}, \qquad \cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\left(B-\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin B\sin C},$$

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{G'}}{\sin B\sin C},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}\sin\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sin\left(B-\frac{\sigma}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\sigma}{2}\right)},$$

et d'une façon plus précise

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{\sigma}{2}\sin\left(A-\frac{\sigma}{2}\right)}{\sqrt{G'}}.$$

Revenons à l'expression de $\cos^2\frac{A}{2}$, et permutons-y les lettres ; on aura

$$\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} = \frac{\sin^2 p\,.\,G}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c};$$

par suite

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{\varepsilon\sin p\sqrt{G}}{\sin a\sin b\sin c},$$

en désignant par ε la quantité ± 1, sans qu'il soit possible de spécifier davantage.

Les formules corrélatives donneraient de même

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = \frac{\varepsilon'\sin\frac{\sigma}{2}\sqrt{G'}}{\sin A\sin B\sin C},$$

ε' désignant encore ± 1 ; nous verrons bientôt que l'on a nécessairement $\varepsilon' = \varepsilon$.

On a maintenant par des combinaisons suffisamment mises

en évidence :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} &= \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \varepsilon\frac{\sin p}{\sin a},\\
\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} &= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \varepsilon\frac{\sin(p-a)}{\sin a},\\
\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} &= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \varepsilon\frac{\sin(p-c)}{\sin a},\\
\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} &= \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \varepsilon\frac{\sin(p-b)}{\sin a}.
\end{aligned}\right.$$

Combinons ces relations par addition et soustraction, et observons que

$$\sin p + \sin(p-a) = 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b+c}{2},$$

$$\sin p - \sin(p-a) = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b+c}{2},$$

$$\sin(p-c) + \sin(p-b) = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2},$$

$$\sin(p-c) - \sin(p-b) = 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2};$$

il vient enfin

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} &= \varepsilon\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, & \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} &= \varepsilon\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},\\
\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} &= \varepsilon\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, & \frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} &= \varepsilon\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Ce sont les *formules de Delambre*, données pour la première fois par cet astronome en 1807.

On peut remarquer, pour s'aider à retenir ces formules d'une importance capitale, que dans les premiers membres, où figurent les angles, on a le rapport de deux lignes différentes, tandis que dans les seconds membres, où figurent les côtés, on a le rapport de deux lignes semblables ; de plus, relativement aux numérateurs, un signe + ou — dans l'un des membres correspond à une ligne *cos* ou *sin* dans l'autre.

En appliquant aux formules de Delambre la transformation T, on voit immédiatement qu'elles ne changent pas dans leur ensemble, sauf que ε est remplacé par la quantité corrélative ε' ; il faut en conclure, comme nous l'avons déjà annoncé, que $\varepsilon' = \varepsilon$, ce que l'on pourrait d'ailleurs vérifier directement.

Les formules de Delambre renferment les six éléments ; elles conduisent par division aux *analogies de Néper*, qui ne contiennent aucun signe ambigu, et relient entre eux cinq éléments :

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}, \\ &\operatorname{tg}\frac{b+c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Relations du troisième ordre. — La souplesse de la Trigonométrie permet de multiplier à l'infini les formules relatives aux triangles sphériques : bornons-nous à établir encore les importantes relations qui suivent, et que nous appelons du *troisième ordre*, parce qu'elle renferment les lignes trigonométriques des quarts des éléments.

Observons d'abord que, d'une façon générale, la relation

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos x'}{\cos y'}$$

donne

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\cos x' - \cos y'}{\cos x' + \cos y'},$$

et par suite

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{tg}\frac{x'-y'}{2}\operatorname{tg}\frac{x'+y'}{2}.$$

Appliquons ce résultat à la première formule de Delambre

$$\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},$$

en supposant $\varepsilon = 1$; on peut toujours faire cette hypothèse sans diminuer la généralité, et elle est réalisée en particulier dans les triangles simples. Nous obtenons

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}\operatorname{cotg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\sigma}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2},$$

et par suite, après permutation des lettres, nous pouvons écrire

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}\operatorname{cotg}\frac{p}{2}\\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}
\end{aligned}\right\} = R.$$

Traitons encore de la même façon la seconde formule de Delambre

$$\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}};$$

il vient

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\sigma}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}.$$

En multipliant ensemble les deux premières expressions de R, puis les deux dernières, et se servant de la relation que nous venons d'obtenir pour éliminer les angles, puis les côtés, on a finalement la double expression suivante pour R :

$$R = \left\{\begin{array}{l}
\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}\\
\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\sigma}{4}\right)};
\end{array}\right.$$

le signe des radicaux dépend encore du choix des éléments. En particulier, on a donc

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}},$$

ce qui est la très remarquable formule de Simon L'Huilier.

Remarque. — Ayant choisi A, B, C, a, b, c, de façon que l'on ait $\varepsilon = 1$, si l'on veut modifier ces éléments de multiples de 2π, tout en conservant cette hypothèse, il faudra que la somme de ces différents multiples soit elle-même un multiple de 4π.

Résolution des triangles sphériques. — Résoudre un triangle sphérique, c'est, se donnant trois éléments quelconques, déterminer les trois autres. On a ainsi, suivant les éléments donnés, six cas à examiner, qui sont corrélatifs deux à deux, et se ramènent par suite à trois véritablement distincts, par application de la transformation T. Nous allons passer en revue ces divers cas, en indiquant les principales méthodes habituellement employées en Astronomie pour les résoudre, et donnant les tableaux complets des formules correspondantes, afin de n'avoir plus à y revenir.

Premier cas. — On donne les trois côtés a, b, c.

Pour calculer l'un des angles inconnus, on a la formule fondamentale

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

ou l'une quelconque de celles qui s'en déduisent et qui donnent $\sin^2\frac{A}{2}$, $\cos^2\frac{A}{2}$ ou $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}$; chacune de ces formules ne détermine l'angle A qu'au signe près, et naturellement à un multiple de 2π près : cette ambiguïté est inévitable, comme nous le savons. Toutefois, si l'on procède de même pour les autres angles, on doit observer que le signe de A par exemple étant fixé, ceux de B et C en résultent, car l'ambiguïté ne porte que sur l'ensemble des trois angles, et non sur chacun d'eux séparément : pour préciser, il suffira d'avoir recours à l'*analogie des sinus*

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c},$$

sur laquelle on lit immédiatement les signes, sans aucun calcul.

Le doute qui subsiste dans le problème actuel sur les signes des angles ne peut être levé que si l'on dispose de quelque renseignement complémentaire sur les inconnues, résultant des conditions dans lesquelles le problème se pose, et c'est ce qui arrive ordinairement dans la pratique.

La première formule fondamentale rappelée ci-dessus est peu employée sous cette forme même, d'abord parce qu'elle détermine A par son cosinus, ce qui peut être souvent désavantageux ; ensuite parce qu'elle n'est pas directement calculable par logarithmes, à moins d'employer les logarithmes d'addition et de soustraction. Il est vrai qu'on peut la rendre calculable par logarithmes en appliquant des procédés bien connus : mais nous n'insisterons pas, ici comme ailleurs, sur cette transformation dont il ne faut pas exagérer l'importance, car bien souvent, pour calculer une somme, il est tout aussi simple d'en calculer directement chaque terme.

Quand on veut calculer à la fois les trois angles inconnus, on procède ainsi : posant, avec un signe arbitraire,

$$k = \frac{\sqrt{G}}{\sin p} = \pm\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{k}{\sin(p-a)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{k}{\sin(p-b)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{k}{\sin(p-c)}$$

On peut aussi se servir des formules du troisième ordre, obtenues en supposant $\varepsilon = 1$, ce que l'on peut toujours faire, et ce que nous ferons toujours. Posant encore avec un signe arbitraire :

$$h = \pm\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}},$$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4} = \frac{h}{\operatorname{cotg}\frac{p}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\frac{\sigma}{4}\right) = \frac{h}{\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-\frac{\sigma}{4}\right) = \frac{h}{\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-\frac{\sigma}{4}\right) = \frac{h}{\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}};$$

on calcule ainsi successivement σ, A, B, C, et comme vérification, on doit avoir $\sigma = A + B + C - \pi$.

Pour que le problème qui nous occupe soit possible, il faut et il suffit que la quantité k ou h soit réelle : mais nous n'insisterons pas davantage sur la discussion de cette condition, car les problèmes de l'Astronomie sont des problèmes réels, ayant nécessairement une solution.

Il n'est pas toujours nécessaire de s'astreindre, dans la résolution d'un triangle sphérique, à déterminer chaque inconnue en fonction des seules données ; mais on peut au contraire, en calculant successivement les inconnues, faire intervenir dans la détermination de chacune celles déjà obtenues. Il est clair que les méthodes de résolution peuvent alors être variées à l'infini sans qu'il soit possible d'entrer dans leurs détails, de sorte que nous devons nous borner, ici comme dans ce qui suivra, aux généralités, toujours suffisantes d'ailleurs.

Il ne faut pas oublier non plus que tout calcul doit être vérifié : on doit choisir à cet effet une formule autre que celles que l'on a employées pour le calcul, et s'assurer que les valeurs trouvées pour les inconnues en rendent les deux membres numériquement égaux. Pour donner à la vérification toute sa valeur, la formule choisie devra contenir tous les éléments calculés, et les éléments donnés devront y figurer par des combinaisons différentes de celles qui ont servi au calcul ; de plus, il sera nécessaire que la formule de vérification soit *sensible*, c'est-à-dire susceptible de mettre en évidence les erreurs que l'on a pu commettre. C'est ainsi que dans le problème présent, le fait que σ et $A + B + C - \pi$ auront la même valeur sera une vérification insuffisante, car son succès ne prouvera pas que les quantités $\frac{p}{2}$, $\frac{p-a}{2}$, ... sont exemptes d'erreur ; c'est ainsi encore que x étant un angle petit, on ne doit pas songer à vérifier sa valeur par une formule où x ne figurerait que par son cosinus.

Comme cas particulier du problème qui vient de nous occuper, on peut supposer le triangle rectilatère avec $a = \frac{\pi}{2}$. Les formules générales s'appliquent sans modification ; mais si l'on veut mettre en évidence notre hypothèse particulière, on

pourra écrire :

$$\left\{\begin{array}{l}\cos A = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c, \qquad \cos B = \dfrac{\cos b}{\sin c}, \qquad \cos C = \dfrac{\cos c}{\sin b}; \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{A}{2} = -\dfrac{\cos(b-c)}{\cos(b+c)}, \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{B}{2} = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{b-c}{2}\right) \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{b+c}{2}\right), \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{C}{2} = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{b-c}{2}\right) \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{b+c}{2}\right). \end{array}\right.$$

Pour fixer les signes, on aura recours à l'analogie des sinus.

Deuxième cas. — On donne les trois angles A, B, C.

Voici l'ensemble des formules que l'on peut appliquer à ce problème, corrélatif du précédent :

1° $$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

et les formules dérivées par permutation des lettres;

2° $$k' = \frac{\sqrt{G'}}{\sin \frac{\sigma}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\sin\left(A - \frac{\sigma}{2}\right) \sin\left(B - \frac{\sigma}{2}\right) \sin\left(C - \frac{\sigma}{2}\right)}{\sin \frac{\sigma}{2}}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin\left(A - \frac{\sigma}{2}\right)}{k'}, \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\sin\left(B - \frac{\sigma}{2}\right)}{k'}, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin\left(C - \frac{\sigma}{2}\right)}{k'};$$

3° $$h' = \pm \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{4} \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)},$$

$$\operatorname{cotg} \frac{p}{2} = \frac{h'}{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{4}}, \qquad \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} = \frac{h'}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{p-b}{2} = \frac{h'}{\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)}, \qquad \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} = \frac{h'}{\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)};$$

4° le triangle étant rectangle, avec $A = \frac{\pi}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \qquad \cos b = \dfrac{\cos B}{\sin C}, \qquad \cos c = \dfrac{\cos C}{\sin B}, \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2} = -\dfrac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)}, \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{b}{2} = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B-C}{2}\right) \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B+C}{2}\right), \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{c}{2} = -\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{B-C}{2}\right) \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{B+C}{2}\right); \end{array}\right.$$

les signes sont fixés par l'analogie des sinus.

Troisième cas. — On donne deux côtés et l'angle compris, b, c, A.

La meilleure méthode de résolution consiste à déterminer simultanément les trois éléments inconnus en se servant des formules de Delambre. Ecrivons celles-ci sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2} &= \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2} = m_1,\\
\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} &= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2} = m_2,\\
\cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} &= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = m_3,\\
\cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2} &= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} = m_4.
\end{aligned}\right.$$

On peut fixer arbitrairement les signes de $\cos\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{2}$, par exemple, car a n'est déterminé qu'au signe près et à un multiple de 2π près. Ce choix fait, il ne reste aucune ambiguïté, car on connaît les signes des sinus et cosinus de $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$.

On calcule ces angles, et par suite B et C, par les relations

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \frac{m_3}{m_4}.$$

On a ensuite

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{m_1}{\sin\frac{B-C}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{m_2}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{m_3}{\sin\frac{B+C}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{m_4}{\cos\frac{B+C}{2}},$$

et chaque fois, on choisira l'expression de $\sin\frac{a}{2}$ ou de $\cos\frac{a}{2}$ qui est la plus facile à calculer avec précision, c'est-à-dire celle dont le dénominateur est le plus grand en valeur absolue. Enfin on calculera $\frac{a}{2}$ par $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, puisqu'on connaît $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$; et comme vérification, les valeurs de $\sin\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ devront être concordantes.

Le problème est toujours possible.

Si l'on ne veut calculer que les angles inconnus B et C, on emploiera avec avantage les analogies de Néper :

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}\,\dfrac{\cos\dfrac{b-c}{2}}{\cos\dfrac{b+c}{2}}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}\,\dfrac{\sin\dfrac{b-c}{2}}{\sin\dfrac{b+c}{2}}; \end{cases}$$

B et C ne sont déterminés qu'à un multiple de π près, mais une fois l'un choisi, l'autre est fixé à un multiple de 2π près : cette ambiguïté est inévitable.

Si l'on veut avoir seulement le côté a et l'angle B, on emploiera les formules suivantes :

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A, \\ \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \end{cases}$$

qui sont respectivement des types (III), (V) et (I), et qui forment un groupe appelé souvent *système de Gauss*.

Le signe de $\sin a$ peut être choisi arbitrairement, et alors les signes de $\sin B$ et $\cos B$ sont fixés : les deux premières formules donnent par division $\operatorname{tg} B$, et permettent ensuite de calculer $\sin a$; en utilisant la troisième formule, on a enfin le côté a par sa tangente, avec une vérification comme plus haut.

Pour rendre le calcul facile par logarithmes, on introduit deux quantités auxiliaires m et M par les relations

$$\begin{cases} m \sin M = \sin b \cos A, \\ m \cos M = \cos b ; \end{cases}$$

il vient en effet alors

$$\begin{cases} \sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ \sin a \cos B = m \sin (c - M), \\ \cos a = m \cos (c - M). \end{cases}$$

Pour calculer m et M, on prendra arbitrairement le signe de m, ce qui donnera les signes de $\sin M$ et $\cos M$; on obtiendra alors l'angle M par sa tangente, et l'on aura m, ou plutôt

son logarithme, par la plus avantageuse des deux relations entre m et M.

Si, une fois le calcul de a et B fait comme nous venons de le dire, on voulait encore obtenir C, on y arriverait facilement avec le moins possible de calculs nouveaux par les formules suivantes, offrant une nouvelle vérification :

$$\begin{cases} \sin a \sin C = \sin c \sin A, \\ \sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A ; \end{cases}$$

la dernière peut d'ailleurs s'écrire sous la forme

$$\sin a \cos C = m_1 \sin (M_1 - c),$$

en faisant

$$\begin{cases} m_1 \sin M_1 = \sin b, \\ m_1 \cos M_1 = \cos b \cos A. \end{cases}$$

Si l'on veut calculer séparément l'un ou l'autre des éléments inconnus, on aura les formules

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \sin A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} b - \cos c \cos A = \dfrac{m \sin (c - M)}{\sin b}, \\ \sin A \operatorname{cotg} C = \sin b \operatorname{cotg} c - \cos b \cos A = \dfrac{m_1 \sin (M_1 - c)}{\sin c}, \end{cases}$$

où m, M, m_1, M_1 sont déterminés comme ci-dessus ; la première peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes suivantes, plus avantageuses souvent :

$$\begin{cases} \sin^2 \dfrac{a}{2} = \sin^2 \dfrac{b - c}{2} + \sin b \sin c \sin^2 \dfrac{A}{2} = \sin^2 \dfrac{b + c}{2} - \sin b \sin c \cos^2 \dfrac{A}{2}, \\ \cos^2 \dfrac{a}{2} = \cos^2 \dfrac{b - c}{2} - \sin b \sin c \sin^2 \dfrac{A}{2} = \cos^2 \dfrac{b + c}{2} + \sin b \sin c \cos^2 \dfrac{A}{2}. \end{cases}$$

Comme cas particuliers du problème actuel, nous avons à résoudre un triangle rectangle $\left(A = \frac{\pi}{2}\right)$ connaissant b et c ; ou bien, en changeant les notations, un triangle rectilatère $\left(a = \frac{\pi}{2}\right)$, connaissant B et c. Les formules propres au triangle rectangle sont :

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b} ;$$

pour le triangle rectilatère, on a

$$\cos b = \sin c \cos B, \quad \operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} B}{\cos c}, \quad \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} c \sin B.$$

Pour achever de préciser les éléments inconnus, on a recours, dans un cas comme dans l'autre, à l'analogie des sinus.

Quatrième cas. — On donne deux angles et le côté compris, B, C, a,

Voici les formules relatives à ce problème, corrélatif du précédent :

$$1^\circ \quad \left\{\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2} &= \sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2},\\
\sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} &= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2},\\
\cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2} &= \sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2},\\
\cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} &= \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2};
\end{aligned}\right.$$

$$2^\circ \quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{b+c}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}},\\
\operatorname{tg}\frac{b-c}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}};
\end{aligned}\right.$$

$$3^\circ \quad \left\{\begin{aligned}
\sin b \sin A &= \sin a \sin B,\\
\cos b \sin A &= \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a,\\
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;
\end{aligned}\right.$$

en faisant

$$\left\{\begin{aligned}
m' \sin M' &= \sin B \cos a,\\
m' \cos M' &= \cos B,
\end{aligned}\right.$$

ceci devient

$$\left\{\begin{aligned}
\sin b \sin A &= \sin a \sin B,\\
\cos b \sin A &= m' \sin (C + M'),\\
\cos A &= -m' \cos (C + M'),
\end{aligned}\right.$$

et on peut y ajouter

$$\left\{\begin{aligned}
\sin c \sin A &= \sin a \sin C,\\
\cos c \sin A &= \sin B \cos C + \sin C \cos B \cos a = m_1' \sin (C + M_1'),
\end{aligned}\right.$$

avec

$$\begin{cases} m_1' \sin M_1' = \sin B, \\ m_1' \cos M_1' = \cos B \cos a ; \end{cases}$$

4°

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \cos^2 \frac{B+C}{2} + \sin B \sin C \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{B-C}{2} - \sin B \sin C \cos^2 \frac{a}{2},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \sin^2 \frac{B+C}{2} - \sin B \sin C \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$= \sin^2 \frac{B-C}{2} + \sin B \sin C \cos^2 \frac{a}{2};$$

$$\sin a \operatorname{cotg} b = \sin C \operatorname{cotg} B + \cos a \cos C = \frac{m' \sin (C + M')}{\sin B},$$

$$\sin a \operatorname{cotg} c = \sin B \operatorname{cotg} C + \cos a \cos B = \frac{m_1' \sin (C + M_1')}{\sin C};$$

5° le triangle étant rectilatère avec $a = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos A = -\cos B \cos C, \qquad \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} B}{\sin C}, \qquad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} C}{\sin B};$$

6° le triangle étant rectangle avec $A = \frac{\pi}{2}$, connaissant b et C :

$$\cos B = \cos b \sin C, \qquad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}, \qquad \operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C;$$

dans les deux derniers cas, on achève de préciser à l'aide de l'analogie des sinus.

Cinquième cas. — On donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, a, b, A.

La meilleure méthode de résolution, applicable quel que soit le nombre des éléments inconnus que l'on recherche, repose sur l'ensemble suivant de formules. Les éléments inconnus sont reliés isolément aux données par les trois relations

$$\begin{cases} \sin B = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}, \\ \cos b \cos c + \sin b \cos A \sin c = \cos a, \\ \cos b \cos C + \operatorname{cotg} A \sin C = \sin b \operatorname{cotg} a ; \end{cases}$$

chacune de ces équations fournit deux valeurs pour B, c, ou C,

de sorte que le problème proposé est susceptible de deux solutions, sous l'unique condition de possibilité

$$| \sin a | > | \sin b \sin A |$$

Pour pouvoir associer convenablement ensemble les différentes valeurs des inconnues, on joindra au système précédent les relations supplémentaires

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg} b \sin c - \cos A \cos c &= \sin A \operatorname{cotg} B, \\ \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C &= \cos B. \end{aligned}\right.$$

Pour effectuer le calcul, observons que l'on peut déterminer trois angles auxiliaires φ, M, N, par les équations concordantes

$$\left\{\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin b \sin A, \\ \cos \varphi \sin M &= \sin b \cos A, \\ \cos \varphi \cos M &= \cos b, \\ \operatorname{cotg} \varphi \sin N &= \frac{\operatorname{cotg} A}{\sin b}, \\ \operatorname{cotg} \varphi \cos N &= \operatorname{cotg} b; \end{aligned}\right.$$

le signe de sin φ est déterminé; celui de cos φ ou cotg φ est arbitraire, en n'oubliant pas que $\operatorname{cotg} \varphi \sin \varphi = \cos \varphi$: il est d'ailleurs inutile de calculer effectivement l'angle φ lui-même, ses lignes trigonométriques étant seules nécessaires.

Dans ces conditions, il est facile de voir que les cinq relations fondamentales que nous avons écrites deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \sin B &= \frac{\sin \varphi}{\sin a}, \\ \cos (c - M) &= \frac{\cos a}{\cos \varphi}, \\ \cos (C - N) &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} a}, \\ \frac{\cos B}{\cos \varphi} &= \frac{\sin (c - M)}{\sin a} = \sin (C - N), \end{aligned}\right.$$

et l'ensemble ainsi obtenu est complet et parfaitement approprié au calcul logarithmique.

Il sera avantageux de commencer le calcul par la détermination de l'angle C; en effet, d'après les équations précédentes,

on a

$$\cos(C - N) = \sin B \cos(c - M),$$

de sorte que le premier membre de cette relation est inférieur en valeur absolue à chacun des facteurs du second membre. On aura ensuite sans ambiguïté les deux autres éléments B, c, les calculs restant les mêmes pour les deux solutions possibles.

Si l'on n'a pas besoin de tous les éléments, certaines quantités auxiliaires pourront devenir inutiles, et l'on dirigera le calcul d'une façon analogue.

Il est superflu d'ajouter encore que, l'une des inconnues étant déterminée, on pourra ramener le problème à ceux déjà traités ou à ceux dans lesquels on connaît quatre éléments, et par suite calculer les inconnues restantes de bien d'autres façons, par exemple à l'aide des analogies de Néper.

Examinons maintenant les cas particuliers. On a d'abord un triangle rectangle en faisant $A = \frac{\pi}{2}$; il n'y a alors rien à changer aux formules précédentes, sinon d'observer que

$$M = N = 0, \qquad \varphi = b.$$

On a un triangle rectilatère en supposant $a = \frac{\pi}{2}$; les formules propres à ce cas sont

$$\sin B = \sin b \sin A, \qquad \operatorname{tg} c = -\frac{\operatorname{cotg} b}{\cos A}, \qquad \operatorname{tg} C = -\cos b \operatorname{tg} A;$$

les autres formules des triangles rectilatères suppriment toute ambiguïté.

On a encore un triangle rectilatère à résoudre en changeant les notations, et supposant connus $a = \frac{\pi}{2}$, b, B : il n'y a rien à changer encore aux formules générales, si ce n'est qu'on doit y faire $M = N = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = A$, puis échanger A et B, et remplacer a par b.

Sixième cas. — On donne deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, A, B, a.

Les formules relatives à ce problème, corrélatif du précé-

dent, seront

$$\left\{\begin{aligned} &\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}, \\ &\cos B \cos C - \cos a \sin B \sin C = -\cos A, \\ &\qquad \cos B \cos c - \operatorname{cotg} a \sin c = -\sin B \operatorname{cotg} A; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\qquad \operatorname{cotg} B \sin C + \cos a \cos C = \sin a \operatorname{cotg} b, \\ &\sin a \cos B \sin c + \cos a \cos c = \cos b; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin a \sin B, \\ \cos \varphi' \sin M' &= \cos a \sin B, \\ \cos \varphi' \cos M' &= -\cos B, \\ \operatorname{cotg} \varphi' \sin N' &= \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin B}, \\ \operatorname{cotg} \varphi' \cos N' &= -\operatorname{cotg} B; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin b &= \frac{\sin \varphi'}{\sin A}, \\ \cos (C - M') &= \frac{\cos A}{\cos \varphi'}, \\ \cos (c - N') &= \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} A}, \\ -\frac{\cos b}{\cos \varphi'} &= \frac{\sin (C - M')}{\sin A} = \sin (c - N'). \end{aligned}\right.$$

Pour un triangle rectilatère, avec $a = \frac{\pi}{2}$, on a

$$M' = N' = \pi, \qquad \varphi' = B;$$

pour un triangle rectangle avec $A = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin b = \sin a \sin B, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}, \qquad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B;$$

enfin, pour un triangle rectangle, avec $A = \frac{\pi}{2}$, connaissant b et B, les formules générales sont encore valables, en y faisant

$$M' = N' = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi' = a,$$

puis échangeant a et b et remplaçant A par B.

Remarque. — Il est facile d'interpréter géométriquement les quantités auxiliaires que nous avons introduites dans le troi-

sième et le cinquième cas de résolution des triangles ; et cette interprétation peut être commode pour retrouver les formules correspondantes.

Dans l'un des cas comme dans l'autre, on connaît l'angle A et le côté b ; menons alors l'arc de grand cercle CH perpendidiculaire à AB (*fig.* 6), de façon à former deux triangles rectangles ACH, BCH, ayant en commun avec le triangle ABC les éléments A, b, d'une part, a, B d'autre part. Les angles en H étant pris égaux à $+\frac{\pi}{2}$ dans ces deux triangles, appelons φ le côté CH, M le côté AH, N l'angle HCA ; on a, par les formules du triangle rectangle,

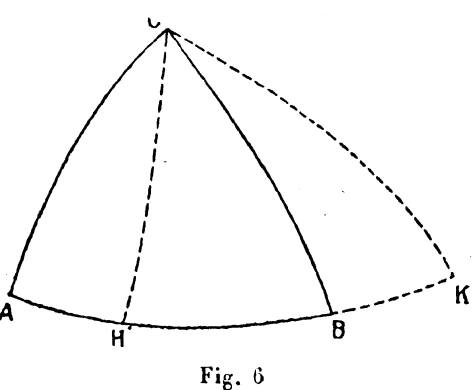


Fig. 6

$$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin b \sin A, \\ \operatorname{tg} M &= \operatorname{tg} b \cos A, \\ \cos\varphi \cos M &= \cos b, \\ \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} N &= \cos b, \\ \operatorname{tg} b \cos N &= \operatorname{tg}\varphi ; \end{aligned}\right.$$

et l'on voit que φ, M, N sont précisément les quantités que nous avons désignées par ces mêmes lettres dans le cinquième cas. La considération du triangle rectangle BHC, dans lequel le côté HB est égal à $c - M$, l'angle BCH égal à $C - N$, donne finalement les formules que nous avons obtenues précédemment.

L'angle M introduit dans le troisième cas est encore le côté AH que nous venons de définir, tandis que la quantité m n'est autre que $\cos\varphi$; et la considération du triangle BHC permet encore d'achever la solution.

Quant à M_1, c'est l'arc AK obtenu en menant CK perpendiculaire à AC jusqu'à sa rencontre en K avec AB, et m_1 est le sinus de l'angle CKB.

Relations différentielles. — Il arrive très fréquemment

qu'ayant résolu un triangle sphérique, on ait à donner aux éléments connus de petites variations : les éléments inconnus reçoivent alors eux-mêmes des variations correspondantes, petites aussi en général, et il importe de savoir déterminer directement ces variations, sans être obligé d'effectuer la résolution directe et rigoureuse du nouveau triangle, mais en profitant des résultats déjà obtenus.

D'autre part, la résolution d'un triangle sphérique d'après les principes précédemment exposés suppose les trois éléments donnés exactement connus, de sorte que les seules erreurs à craindre sur les éléments inconnus sont celles qui résultent de l'emploi des tables : en augmentant la précision de ces dernières, on peut diminuer ces erreurs autant qu'on le veut. Mais, dans les problèmes de l'Astronomie pratique, les données ne sont jamais exactes, et il est nécessaire de savoir quelles modifications on doit faire subir aux éléments calculés, si les éléments donnés subissent eux-mêmes des corrections déterminées. Cette connaissance est indispensable pour pouvoir apprécier l'exactitude des résultats, et aussi pour fixer la précision avec laquelle le calcul doit être effectué : il est inutile de calculer à $0'',1$ près, si, par suite de l'incertitude des données, on craint sur les résultats des erreurs d'une demi-minute. Elle est indispensable encore pour permettre de discuter utilement les *circonstances favorables* à la détermination de telle ou telle des inconnues, considérée isolément ; par suite, de fixer les conditions dans lesquelles on doit se placer pour que la valeur de cette inconnue soit affectée le moins possible par les erreurs des données : et c'est là un problème fondamental en Astronomie pratique.

Pour atteindre facilement le double but que nous venons d'indiquer, il faut supposer tout d'abord que les variations, ou corrections, des éléments donnés sont des quantités assez petites pour que l'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits deux à deux.

Faisant alors la même hypothèse sur les variations des inconnues elles-mêmes, on voit que tout se passe comme s'il s'agissait de différentielles, et la solution du problème nous est fournie par la simple différentiation des formules fonda-

mentales. On aura ainsi autant de *relations différentielles* entre les variations de quatre éléments qu'il y a de formules fondamentales, soit quinze, et ces relations seront de quatre types différents, correspondant aux types (I), (II), (III), (IV).

1° De

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

on tire

$$\sin a \,.\, da = (\sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A)\, db$$
$$+ (\sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A)\, dc + \sin b \sin c \sin A \,.\, dA,$$

relation qui peut s'écrire sous la forme

$$\text{(I)} \qquad da = \cos C \,.\, db + \cos B \,.\, dc + \left\{ \begin{matrix} \sin b \sin C \\ \sin c \sin B \end{matrix} \right\} dA,$$

les quantités entre accolades pouvant être substituées l'une à l'autre.

2° On a de même, en partant de (II) :

$$\text{(II)} \qquad dA = -\cos c \,.\, dB - \cos b \,.\, dC + \left\{ \begin{matrix} \sin b \sin C \\ \sin c \sin B \end{matrix} \right\} da.$$

3° La différentiation logarithmique de la relation

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

donne

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{cotg} b \,.\, db - \operatorname{cotg} B \,.\, dB = \operatorname{cotg} c \,.\, dc - \operatorname{cotg} C \,.\, dC.$$

4° En partant de

$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin C \operatorname{cotg} A,$$

on a

$$(\sin b \cos C + \cos b \operatorname{cotg} a)\, db$$
$$+ (\cos b \sin C - \cos C \operatorname{cotg} A)\, dC = \frac{\sin b}{\sin^2 a}\, da - \frac{\sin C}{\sin^2 A}\, dA;$$

multipliant par sin a sin A, il vient finalement

$$\text{(IV)} \qquad \cos c \sin A \,.\, db + \sin a \cos B \,.\, dC = \sin B \,.\, da - \sin c \,.\, dA.$$

On a ainsi toutes les formules cherchées, et l'on remarquera que, pour les appliquer, il faut en général connaître tous les éléments du triangle envisagé, même ceux qui *a priori* ne sont

pas nécessaires : ces derniers ne seront par suite calculés que d'une façon approchée.

L'usage des relations différentielles appelle une remarque très importante et d'un caractère général que nous allons faire dès maintenant. Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables par exemple, et supposons que l'on ait établi pour cette fonction la relation différentielle

$$df = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz;$$

X, Y, Z ne sont autres que les dérivées partielles de f par rapport à x, y, z, de sorte que, si Δf est l'accroissement véritable que reçoit la fonction f quand on donne à x, y, z, les accroissements dx, dy, dz, la valeur ci-dessus de df est la partie principale du développement de Δf suivant les puissances croissantes de dx, dy, dz, tel que le fournit la formule de Taylor. *En général*, les quantités X, Y, Z ne sont pas spécialement grandes, et le développement de Taylor est rapidement convergent ; l'accroissement Δf est donc bien, comme on l'a supposé, du même ordre que les variations données dx, dy, dz, et l'erreur commise en remplaçant Δf par df est de l'ordre du carré des variations, et par suite négligeable, puisque l'hypothèse fondamentale est que les quantités de cet ordre de grandeur sont négligeables.

En d'autres termes, l'emploi des formules différentielles pour déterminer les variations des inconnues en fonction de celles des données est parfaitement légitime et justifié.

Avant d'aller plus loin, remarquons que l'on peut exprimer d'une autre façon, souvent utile, le fait qu'une erreur du second ordre par rapport aux variations est négligeable : ceci revient en effet à dire que l'on peut tolérer sur les corrections des inconnues une erreur *relative* du même ordre que les corrections des données.

Tout ce qui vient d'être dit sur l'accroissement Δf cesse d'exister si, dans le domaine des valeurs données x, y, z, la fonction f cesse d'être développable en série de Taylor, c'est-à-dire si le point analytique (x, y, z) est un point singulier pour la fonction f. Mais il y a plus : il est évident alors que si ce point (x, y, z), sans être un point singulier, est voisin d'un

point singulier, le développement de Taylor, qui garde sa valeur théorique, cesse pratiquement d'être convergent, ses coefficients devenant très grands : par suite les conclusions énoncées plus haut ne sont plus acceptables.

Les formules différentielles d'un problème montreront en général par elles-mêmes dans quels cas leur emploi cesse d'être légitime : il est clair en effet que si elles fournissent pour les corrections des inconnues, ou au moins de certaines des inconnues, des valeurs beaucoup plus grandes que les corrections des données, elles ne peuvent plus servir qu'à titre d'indication : et ceci ne doit pas surprendre, puisque l'hypothèse qui nous a servi de point de départ pour leur établissement cesse d'être vérifiée, les quantités du second ordre par rapport à *toutes* les variations cessant d'être négligeables.

En pareil cas, il semble qu'il n'y ait d'autre ressource pour trouver les variations des inconnues, que de reprendre la solution directe et rigoureuse du problème, en attribuant aux données leurs nouvelles valeurs. Cependant, il n'en est pas toujours ainsi, et l'on peut bien souvent, par une interprétation judicieuse et une combinaison appropriée des formules différentielles générales, éviter les nouveaux calculs, et trouver encore, comme dans les cas ordinaires, pour les corrections des inconnues des valeurs approchées affectées seulement d'une erreur relative de l'ordre des variations données. Deux exemples relatifs à la Trigonométrie sphérique, l'un très simple, l'autre d'une importance capitale pour l'Astronomie, vont nous permettre d'éclaircir les considérations précédentes, et de montrer comment l'on peut s'y prendre dans les cas exceptionnels pour obtenir le résultat que nous venons d'annoncer.

Soit d'abord un triangle sphérique équilatéral de côté inconnu a, d'angle donné A ; on a les formules concordantes

$$\cos a = \frac{\cos A}{1 - \cos A},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = 4 \sin\left(\frac{A}{2} - 30^\circ\right) \sin\left(\frac{A}{2} + 30^\circ\right) = -\frac{\cos\frac{3A}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

et la relation différentielle

$$\sin a \, . \, da = \frac{\sin A \, . \, dA}{(1 - \cos A)^2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{2 \sin^3 \frac{A}{2}} dA.$$

Comme application, faisons $A = 90°$; alors $a = 90°$, $da = dA$; en réalité, pour $A = 90°10'$, par exemple, le calcul direct donne $a = 90°9'58''$: la formule différentielle ne conduit qu'à une erreur de $2''$.

Mais l'emploi de cette formule différentielle pour calculer da cesse évidemment d'être légitime, autrement que comme simple indication, si $\sin a$ est très petit, c'est-à-dire si A est voisin de 60°. C'est ce qu'on peut vérifier numériquement sans peine : pour $A = 60°20'$, on a $a = 11°28'27''$, et $da = 17,12\, dA$, ce qui montre bien que la variation da ne peut plus être considérée comme étant du même ordre de grandeur que dA. Pour $dA = \pm 10'$, on a ainsi $da = \pm 2°51'$, tandis que par un calcul direct, on a en réalité, suivant le cas, $\Delta a = + 2°33'40''$ ou $\Delta a = - 3°21'2''$; la caractéristique Δ désignant toujours les accroissements véritables.

On peut obtenir cependant de meilleurs résultats, tout en évitant le calcul direct, de la façon suivante. Appelant P le second membre de notre formule différentielle, on voit que l'on a $d(\cos a) = - P$, de sorte qu'en substituant $\cos a$ à a, la difficulté provenant du dénominateur $\sin a$ dans l'expression de da disparaît. Négligeant toujours le carré de dA (c'est notre hypothèse fondamentale), on peut confondre $d(\cos a)$ avec $\Delta(\cos a)$, et écrire par suite légitimement :

$$\Delta(\cos a) = \cos(a + \Delta a) - \cos a = - P;$$

il en résulte, au même degré d'approximation,

$$\sin(a + \Delta a) = \sqrt{\sin^2 a + 2P \cos a},$$

et par suite

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta a}{2} = \frac{\cos a - \cos(a + \Delta a)}{\sin a + \sin(a + \Delta a)} = \frac{P}{\sin a + \sqrt{\sin^2 a + 2P \cos a}};$$

on obtient ainsi pour Δa une valeur dont l'erreur relative sera de l'ordre de dA, comme dans le cas général.

Appliquant ceci à nos derniers exemples, on trouve effectivement $\Delta a = 2°34'$, ou $\Delta a = -3°20'$; et l'on voit combien on s'est ainsi rapproché de la vérité.

Considérons en second lieu un triangle sphérique dans lequel on donne les deux côtés b, c et l'angle compris A. Les formules différentielles relatives aux variations du côté a et de l'angle B sont

$$\left\{\begin{aligned} \sin a\,.\,dB &= \sin C\,.\,db - \cos a \sin B\,.\,dc - \sin b \cos C\,.\,dA,\\ da &= \cos C\,.\,db + \cos B\,.\,dc + \sin b \sin C\,.\,dA,\end{aligned}\right.$$

et l'on voit aussitôt qu'elles cessent d'être applicables quand $\sin a$ est petit, car elles fournissent alors pour dB des valeurs trop grandes. Il est évident d'ailleurs géométriquement que, si le triangle ABC a le côté BC très petit (ou très voisin de π), de petites variations appliquées aux éléments A, b, c, peuvent produire sur l'angle B de très grands changements, le côté a restant petit.

On peut cependant tirer un excellent parti des formules différentielles, même quand elles ne sont plus applicables, en suivant la méthode suivante dont le principe est dû à Fabritius (*Astronomische Nachrichten*, t. 87, 1876). Posons

$$\left\{\begin{aligned} x &= \sin a \sin B = \sin b \sin A,\\ y &= \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A,\\ z &= \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\end{aligned}\right.$$

et désignons d'autre part par P et Q les seconds membres de nos deux relations différentielles. On a en général

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \quad P \cos B + Q \cos a \sin B,\\ dy &= -P \sin B + Q \cos a \cos B,\\ dz &= -Q \sin a,\end{aligned}\right.$$

et comme il est évident que x, y, z sont des fonctions de A, b, c, toujours développables en séries de Taylor dans le domaine d'un point analytique quelconque (A, b, c), on peut toujours légitimement (les quantités du second ordre par rapport à dA, db, dc, étant négligeables), confondre Δx, Δy, Δz avec dx, dy,

dz, et par suite écrire

$$\begin{cases} \Delta x = \sin(a + \Delta a)\sin(B + \Delta B) - \sin a \sin B \\ \quad = dx = P\cos B + Q\cos a \sin B, \\ \Delta y = \sin(a + \Delta a)\cos(B + \Delta B) - \sin a \cos B \\ \quad = dy = -P\sin B + Q\cos a\cos B, \\ \Delta z = \cos(a + \Delta a) - \cos a = dz = -Q\sin a. \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre rigoureusement ces équations par rapport à Δa et ΔB pour avoir des valeurs approchées de ces quantités, dont l'erreur relative sera du même ordre de grandeur que les variations des données, comme dans le cas général.

Ce calcul, que nous retrouverons plus d'une fois, se fait de la façon suivante : combinant les deux premières équations par addition, après multiplication préalable par cos B et — sin B, ou sin B et cos B, on obtient d'abord

$$\begin{cases} \sin(a + \Delta a)\sin\Delta B = P, \\ \sin(a + \Delta a)\cos\Delta B = \sin a + Q\cos a, \end{cases}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\Delta B = \frac{P}{\sin a + Q\cos a},$$

ou plus simplement, avec la même approximation,

$$\operatorname{tg}\Delta B = \frac{P}{\sin(a + Q)}.$$

et cette première relation fournit ΔB.

Ajoutons maintenant les deux dernières équations écrites, après multiplication de la première par $\operatorname{tg}\frac{\Delta B}{2}$; à cause de l'identité

$$\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha = 1,$$

il vient

$$\sin(a + \Delta a) - \sin a = P\operatorname{tg}\frac{\Delta B}{2} + Q\cos a;$$

rapprochant ce résultat de la troisième des équations primitives

$$\cos(a + \Delta a) - \cos a = -Q\sin a,$$

et faisant une combinaison évidente, il vient enfin pour déterminer Δa,

$$\sin \Delta a = Q + P \cos a \operatorname{tg} \frac{\Delta B}{2}.$$

On voit comment les expressions P et Q, inutilisables *a priori*, ont servi cependant à déterminer des valeurs suffisamment exactes de ΔB et Δa.

On doit remarquer que Δa reste en général du même ordre de grandeur que P et Q, c'est-à-dire que les variations des données; on peut alors remplacer $\sin \Delta a$ par Δa sans inconvénient.

Exemple. — Considérons le triangle réduit à un arc de grand cercle dans lequel $A = 0°$, $b = 29°40'$, $c = 30°$, de sorte que, sans calcul, $a = 20'$, $B = 0°$, $C = 180°$. Faisons maintenant $dA = db = 5'$ et $dc = -5'$; les formules différentielles ordinaires donneraient $dB = 7°5'$, $da = -10'$; les formules de Fabritius donnent $\Delta B = 13°54'$ et $\Delta a = -9'41'',9$; enfin un calcul direct donne les vraies valeurs $\Delta B = 13°55'56''$, $\Delta a = -9'41'',7$.

Retour à la Trigonométrie rectiligne. — Si les côtés d'un triangle sphérique sont a, b, c, rapportés au rayon R de la sphère comme unité, leurs *longueurs* sont $\alpha = aR$, $\beta = bR$, $\gamma = cR$. Si α, β, γ restent fixes, tandis que R augmente, a, b, c diminuent : à la limite, si l'on fait R infini, a, b, c deviennent nuls, et le triangle, qui ne cesse pas d'exister, devient plan.

La Trigonométrie rectiligne doit donc résulter de la Trigonométrie sphérique par un simple passage à la limite : c'est ce que nous allons montrer tout d'abord sur les formules fondamentales. Celles-ci sont des quatre types

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$
$$\sin b \sin C = \sin c \sin B,$$
$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin C \operatorname{cotg} A.$$

Remplaçons a, b, c par $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, et développons les deux membres de chacune de ces relations suivant les puissances

décroissantes de R; α, β, γ, restant fixes, A, B, C varient avec R, en tendant vers des limites A_0, B_0, C_0, qui correspondent à R infini : les relations limites s'obtiennent alors immédiatement, en égalant les coefficients de la plus haute puissance de R dans les deux membres, et remplaçant A, B, C par A_0, B_0, C_0.

On a ainsi :

1° $$1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \ldots = \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\beta}{R} + \ldots\right)\left(\frac{\gamma}{R} + \ldots\right)\cos A,$$

d'où

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A_0.$$

2° $$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \left(1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \ldots\right),$$

d'où

$$\cos A_0 = -\cos B_0 \cos C_0 + \sin B_0 \sin C_0 = -\cos(B_0 + C_0).$$

et par suite, à cause des relations analogues,

$$A_0 + B_0 + C_0 = (2k + 1)\pi,$$

k étant un entier quelconque.

3° $$\left(\frac{\beta}{R} + \ldots\right)\sin C = \left(\frac{\gamma}{R} + \ldots\right)\sin B,$$

d'où

$$\beta \sin C_0 = \gamma \sin B_0.$$

4° $$(1 - \ldots)\cos C = \left(\frac{\beta}{R} + \ldots\right)\left(\frac{R}{\alpha} + \ldots\right) - \sin C \operatorname{cotg} A,$$

d'où

$$\cos C_0 = \frac{\beta}{\alpha} - \sin C_0 \operatorname{cotg} A_0,$$

ou bien

$$\beta = \alpha \cos C_0 + \frac{\alpha \sin C_0}{\sin A_0}\cos A_0,$$

ou enfin

$$\beta = \alpha \cos C_0 + \gamma \cos A_0.$$

On voit que nous avons bien retrouvé toutes les formules de la Trigonométrie plane, formules qui auront la même généra-

lité que celles de la Trigonométrie sphérique, si l'on définit un triangle rectiligne d'une façon générale. Mais nous nous bornerons, dans tout ce qui suit, à la considération des triangles rectilignes et sphériques *simples*, tels qu'on les envisage en Géométrie élémentaire.

La surface S du triangle ABC est égale alors, comme l'on sait, à σR^2, où $\sigma = A + B + C - \pi$ est l'excès sphérique. Or nous avons vu que

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}},$$

de sorte que

$$\frac{S}{4R^2} + \ldots = \sqrt{\left(\frac{\varphi}{2R} + \ldots\right)\left(\frac{\varphi-\alpha}{2R} + \ldots\right)\left(\frac{\varphi-\beta}{2R} + \ldots\right)\left(\frac{\varphi-\gamma}{2R} + \ldots\right)},$$

en faisant $2\varphi = \alpha + \beta + \gamma$.

Si donc S tend vers S_0 quand R devient infini, on a

$$S_0 = \sqrt{\varphi(\varphi-\alpha)(\varphi-\beta)(\varphi-\gamma)}.$$

A chaque formule de la Trigonométrie sphérique, on peut faire correspondre de même une formule de la Trigonométrie plane, sans qu'il soit nécessaire de faire un examen plus détaillé.

Triangles géodésiques sur la sphère. Théorème de Legendre. — Imaginons maintenant que, sans devenir infini, R devienne très grand par rapport à α, β, γ, de sorte que a, b, c sont très petits : c'est ce qui arrive pour les *triangles géodésiques*, puisque sur la Terre supposée sphérique, un arc de 3° par exemple représente 333 kilomètres. Le triangle sphérique est alors voisin du triangle rectiligne limite, et il convient de profiter de ce fait pour en faciliter l'étude, non seulement parce que les calculs trigonométriques sur les petits arcs sont pénibles, mais parce que ce sont les longueurs α, β, γ qui interviennent directement dans cette étude.

Gardant toutes les notations précédentes, et supposant toujours que le triangle est simple, nous allons chercher d'abord une expression de la différence $A - A_0$ entre les angles correspondants du triangle sphérique et du triangle rectiligne

qui ont les mêmes longueurs de côtés, α, β, γ : à cet effet, nous partirons des formules

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{A_0}{2}=\sqrt{\frac{(\varphi-\beta)(\varphi-\gamma)}{\varphi(\varphi-\alpha)}}.$$

Des développements connus

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots,$$

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots,\ (\,|z|<1\,)$$

il est facile de tirer, si x est suffisamment petit,

$$\log\sin x=\log x-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\ldots;$$

(il s'agit ici de logarithmes népériens).

On a donc, par exemple,

$$\log\sin p=\log\sin\frac{\varphi}{R}=\log\frac{\varphi}{R}-\frac{\varphi^2}{6R^2}-\frac{\varphi^4}{180R^4}-\ldots,$$

de sorte que

$$\log\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\log\operatorname{tg}\frac{A_0}{2}+k,$$

avec

$$k=\frac{1}{12R^2}[\varphi^2+(\varphi-\alpha)^2-(\varphi-\beta)^2-(\varphi-\gamma)^2]$$

$$+\frac{1}{360R^4}[\varphi^4+(\varphi-\alpha)^4-(\varphi-\beta)^4-(\varphi-\gamma)^4]+\ldots,$$

cette série procédant suivant les puissances entières de $\frac{1}{R^2}$.

Faisons pour un instant

$$\beta+\gamma=s,\qquad \beta-\gamma=d;$$

on aura

$$\varphi^2+(\varphi-\alpha)^2-(\varphi-\beta)^2-(\varphi-\gamma)^2=\frac{1}{4}[(\alpha+s)^2+(\alpha-s)^2-(\alpha+d)^2-(\alpha-d)^2]$$

$$=\frac{1}{2}(s^2-d^2)$$

$$=2\beta\gamma;$$

$$\varphi^4+(\varphi-\alpha)^4-(\varphi-\beta)^4-(\varphi-\gamma)^4=\frac{1}{16}[(\alpha+s)^4+(\alpha-s)^4-(\alpha+d)^4-(\alpha-d)^4]$$
$$=\frac{1}{8}[6\alpha^2s^2-6\alpha^2d^2+s^4-d^4]$$
$$=\frac{1}{8}(s^2-d^2)(6\alpha^2+s^2+d^2)$$
$$=\beta\gamma(3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

et par suite

$$k=\frac{\beta\gamma}{6R^2}\left[1+\frac{3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{60R^2}+\ldots\right].$$

Or on a

$$\frac{d}{dA}\left(\log \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sin A},\qquad \frac{d}{dA}\left(\frac{1}{\sin A}\right)=-\frac{\cos A}{\sin^2 A},\ \ldots;$$

donc, si l'on suppose

$$A=A_0+h,$$

la formule de Taylor donnera l'égalité

$$k=\frac{h}{\sin A_0}-\frac{h^2}{2}\frac{\cos A_0}{\sin^2 A_0}+\ldots,$$

d'où l'on peut tirer h.

On voit que h est développable sous la même forme que k; le premier terme du développement est d'ailleurs $\frac{\beta\gamma \sin A_0}{6R^2}$, c'est-à-dire $\frac{S_0}{3R^2}$, en appelant comme ci-dessus S_0 la surface du triangle rectiligne de côtés α, β, γ; et l'on a d'une façon plus complète

$$h=\frac{S_0}{3R^2}\left[1+\frac{3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+5\beta\gamma\cos A_0}{60R^2}+\ldots\right];$$

remplaçant encore $2\beta\gamma \cos A_0$ par $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2$, il vient finalement

$$A=A_0+\frac{S_0}{3R^2}\left(1+\frac{\alpha^2+7\beta^2+7\gamma^2}{120R^2}+\ldots\right).$$

et ce développement pourrait être prolongé sans aucune peine.

En tenant compte des formules analogues relatives à B et C, on en déduit

$$\sigma=A+B+C-\pi=\frac{S_0}{R^2}\left(1+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{24R^2}+\ldots\right),$$

d'où

$$S = S_0\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{24R^2} + \ldots\right),$$

et

$$A = A_0 + \frac{\sigma}{3}\left(1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2}{60R^2} + \ldots\right).$$

Si l'on se borne aux premiers termes des développements, on a simplement

$$\left\{\begin{array}{ll} S = S_0, & A - A_0 = \dfrac{\sigma}{3}, \\ \sigma = \dfrac{S_0}{R^2}, & B - B_0 = \dfrac{\sigma}{3}, \\ & C - C_0 = \dfrac{\sigma}{3}. \end{array}\right.$$

Ces résultats constituent ce que l'on appelle le *théorème de Legendre* : en particulier les différences $A - A_0$, $B - B_0$, $C - C_0$ sont toutes trois égales au tiers de l'excès sphérique σ, avec une erreur relative du second ordre par rapport aux quantités $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$. En réalité, ainsi qu'on le voit sur les formules développées, cette erreur est notablement plus petite encore, et cela d'autant plus que le triangle est plus près d'être équilatéral.

Pour nous rendre compte de la grandeur de l'excès sphérique σ d'un triangle géodésique, faisons

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{R}{20},$$

ce qui, à la surface de la Terre, correspond à un triangle équilatéral dont le côté dépasse 300 kilomètres. On a en secondes d'arc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sqrt{3}}{4 \times 400}\left(1 + \frac{1}{8 \times 400} + \ldots\right) \times 206265'' \\ &= 223'',29 + 0'',0698 + \ldots \\ &= 223'',36; \end{aligned}$$

et par suite

$$A = B = C = 60^\circ + 74'',45.$$

On voit que si l'on avait pris simplement $\sigma = \frac{S_0}{R^2}$, comme l'indique le théorème de Legendre, l'erreur aurait été bien peu sensible ; elle est tout à fait négligeable dans tous les cas ordinaires.

Pratiquement, on mesure toujours les trois angles d'un triangle géodésique ; et par suite, pour ramener leur résolution à celle du triangle rectiligne dont les côtés ont la même longueur, il suffit de diminuer chacun des angles mesurés du tiers de l'excès de leur somme sur deux angles droits.

Exemples numériques. — Nous terminerons ce Chapitre par quelques exemples de résolution de triangles suivant les méthodes précédemment exposées.

Les calculs sont effectués avec six décimales en général, d'après les règles expliquées au premier chapitre du Tome II ; ils sont disposés de façon à demander le moins de peine possible au calculateur. On doit observer que l'indication *log* a été omise partout, mais doit être regardée comme sous-entendue.

I

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 69^\circ 38' 52'',8$$
$$b = 124^\circ 22' 46'',4$$
$$c = 243^\circ\ 7' 23'',6.$$

Première Solution :

$p =$	$218^\circ 34' 31'',4$	$\sin(p-a)$	$\bar{1},712754$
$p-a =$	$148^\circ 55' 38'',6$	$\sin(p-b)$	$\bar{1},998834$
$p-b =$	$94^\circ 11' 45'',0$	$\sin(p-c)$	$\bar{1},618522\,n$
$p-c =$	$-24^\circ 32' 52'',2$	$\sin p$	$\bar{1},794867\,n$
$\frac{A}{2} =$	$48^\circ 36' 35'',0$		
		k^2	$\bar{1},535243$
$\frac{B}{2} =$	$30^\circ 25' 17'',6$		
		k	$\bar{1},767622$
$\frac{C}{2} =$	$125^\circ 21'\ 8'',8$		
$A =$	$97^\circ 13' 10'',0$	$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$	$0,054868$
$B =$	$60^\circ 50' 35'',2$	$\operatorname{tg}\frac{B}{2}$	$\bar{1},768788$
$C =$	$250^\circ 42' 17'',6$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	$0,149100\,n$

DEUXIÈME SOLUTION :

$\frac{p}{2} =$	$109°17'15'',7$	$\cot g \frac{p}{2}$	$\bar{1},544011\,n$
$\frac{p-a}{2} =$	$74°27'49'',3$	$\operatorname{tg} \frac{p-a}{2}$	$0,555944$
$\frac{p-b}{2} =$	$47°\ 5'52'',5$	$\operatorname{tg} \frac{p-b}{2}$	$0,031832$
$\frac{p-c}{2} =$	$-\ 12°16'26'',1$	$\operatorname{tg} \frac{p-c}{2}$	$\bar{1},337576\,n$
$\frac{\sigma}{4} =$	$57°11'30'',6$	h^2	$\bar{1},469363$
		h	$\bar{1},734682\,n$
$\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$-\ 8°34'55'',7$	$\operatorname{tg} \frac{\sigma}{4}$.	$0,190671$
$\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$-\ 26°46'13'',2$	$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$\bar{1},178738\,n$
$\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$68°\ 9'38'',2$	$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$\bar{1},702850\,n$
Somme $=$	$89°59'59'',9$	$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$0,397106$
$\frac{A}{2} =$	$48°36'34'',9$	$A =$	$97°13'\ 9'',8$
$\frac{B}{2} =$	$30°25'17'',4$	$B =$	$60°50'34'',8$
$\frac{C}{2} =$	$125°21'\ 8'',8$	$C =$	$250°42'17'',6$

VÉRIFICATION PAR LA FORMULE

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2};$$

en prenant les valeurs de la première solution,

$\sin\frac{a}{2} = \sin$	$34°49'26'',4$	$\bar{1},756680$	$\bar{2},690946\,n$
$\cos\frac{B-C}{2} = \cos -$	$94°55'51'',2$	$\bar{2},934266\,n$	
$\sin\frac{A}{2} = \sin$	$48°36'35'',0$	$\bar{1},875190$	$\bar{2},690949\,n$
$\sin\frac{b+c}{2} = \sin$	$183°45'\ 5'',0$	$\bar{2},815759\,n$	

La petitesse des lignes trigonométriques qui figurent ici ne permet pas d'exiger une précision supérieure.

II

Résoudre un triangle connaissant les trois angles :

$$A = 97^\circ 13' 10'',0$$
$$B = 60^\circ 50' 35'',2$$
$$C = 250^\circ 42' 17'',6.$$

PREMIÈRE SOLUTION :

$$\frac{\sigma}{2} = 114^\circ 23' \ 1'',4$$
$$A - \frac{\sigma}{2} = -17^\circ \ 9' 51'',4$$
$$B - \frac{\sigma}{2} = -53^\circ 32' 26'',2$$
$$C - \frac{\sigma}{2} = 136^\circ 19' 16'',2$$

$$\frac{a}{2} = 34^\circ 49' 26'',4$$
$$\frac{b}{2} = 62^\circ 11' 23'',0$$
$$\frac{c}{2} = 121^\circ 33' 41',8$$

$$a = 69^\circ 38' 52'',8$$
$$b = 124^\circ 22' 46'',0$$
$$c = 243^\circ \ 7' 23'',6$$

$$\sin\left(A - \frac{\sigma}{2}\right) \quad \bar{1},469987\,n$$
$$\sin\left(B - \frac{\sigma}{2}\right) \quad \bar{1},905406\,n$$
$$\sin\left(C - \frac{\sigma}{2}\right) \quad \bar{1},839236$$
$$\sin\frac{\sigma}{2} \quad \bar{1},959423$$
$$k'^2 \quad \bar{1},255206$$
$$k' \quad \bar{1},627603\,n$$
$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} \quad \bar{1},842384$$
$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} \quad 0,277803$$
$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} \quad 0,211633\,n$$

DEUXIÈME SOLUTION :

$\frac{\sigma}{4} =$	$57°11'30'',7$	$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{4}$	$0,190671$
$\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$-\ 8°34'55'',7$	$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$\bar{1},178738\,n$
$\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$-\ 26°46'13'',1$	$\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$\bar{1},702849\,n$
$\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4} =$	$68°\ 9'38'',1$	$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2} - \frac{\sigma}{4}\right)$	$0,397105$
		h'^2	$\bar{1},469363$
$\frac{p}{2} =$	$109°17'15'',7$	h'	$\bar{1},734682\,n$
$\frac{p-a}{2} =$	$74°27'49'',3$	$\operatorname{cotg}\frac{p}{2}$	$\bar{1},544011\,n$
$\frac{p-b}{2} =$	$47°\ 5'52'',7$	$\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}$	$0,555944$
$\frac{p-c}{2} =$	$-\ 12°16'26'',2$	$\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}$	$0,031833$
		$\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}$	$\bar{1},337577\,n$
Somme $=$	$218°34'31'',5 = p$		
$\frac{a}{2} =$	$34°49'26'',4$	$a =$	$69°38'52'',8$
$\frac{b}{2} =$	$62°11'23'',0$	$b =$	$124°22'46'',0$
$\frac{c}{2} =$	$121°33'41'',9$	$c =$	$243°\ 7'23'',8$

VÉRIFICATION PAR LA FORMULE

$$\cos\frac{b}{2}\sin\frac{A+C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{a-c}{2};$$

en prenant les valeurs de la première solution

$\cos\frac{b}{2} = \cos\ 62°11'23'',0$	$\bar{1},668894$	$\bar{2},690848$
$\sin\frac{A+C}{2} = \sin\ 173°57'43'',8$	$\bar{1},021954$	
$\cos\frac{B}{2} = \cos\ 30°25'17'',6$	$\bar{1},935670$	$\bar{2},690848$
$\cos\frac{a-c}{2} = \cos - 86°44'15'',4$	$\bar{2},755178$	

III

Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris :

$$b = 124^\circ 22' 46'',4$$
$$c = 243^\circ \; 7' 23'',6$$
$$A = \;\; 97^\circ 13' 10'',0.$$

PREMIÈRE SOLUTION :

$\frac{b+c}{2} =$	$183^\circ 45' \; 5'',0$	$\sin\frac{b-c}{2}$	$\bar{1},934747\,n$
$\frac{b-c}{2} = -$	$59^\circ 22' 18'',6$	$\cos\frac{A}{2}$	$\bar{1},820323$
$\frac{A}{2} =$	$48^\circ 36' 35'',0$	$\cos\frac{b-c}{2}$	$\bar{1},707114$
		$\sin\frac{b+c}{2}$	$\bar{2},815759\,n$
		$\sin\frac{A}{2}$	$\bar{1},875191$
		$\cos\frac{b+c}{2}$	$\bar{1},999069\,n$

m_1	$\bar{1},755070\,n$	m_3	$\bar{1},527437$
m_2	$\bar{2},690950\,n$	m_4	$\bar{1},874260\,n$
$\sin\frac{B-C}{2}$	$\bar{1},998390\,n$	$\cos\frac{B+C}{2}$	$\bar{1},959963\,n$
$\text{tg}\,\frac{B-C}{2}$	$1,064120$	$\text{tg}\,\frac{B+C}{2}$	$\bar{1},653177\,n$

$\sin\frac{a}{2}$ $\bar{1},756680$

$\cos\frac{a}{2}$ $\bar{1},914297$

$\text{tg}\,\frac{a}{2}$ $\bar{1},842383$

$$\frac{B-C}{2} = -94^\circ 55' 51'',3 \qquad B = 60^\circ 50' 35'',1$$

$$\frac{B+C}{2} = 155^\circ 46' 26'',4 \qquad C = 250^\circ 42' 17'',7$$

$$\frac{a}{2} = 34^\circ 49' 26'',2 \qquad a = 69^\circ 38' 52'',4$$

On peut vérifier comme ci-dessus, ou encore par

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

sin a	$\bar{1}$,972005	sin b	$\bar{1}$,916620	sin c	$\bar{1}$,950356 n
sin A	$\bar{1}$,996543	sin B	$\bar{1}$,941158	sin C	$\bar{1}$,974893 n
	$\bar{1}$,975462		$\bar{1}$,975462		$\bar{1}$,975463

Cette vérification n'est pas d'une grande précision, les sinus qui y figurent étant tous grands en valeur absolue.

DEUXIÈME SOLUTION :

C étant inutile,

cos A	$\bar{1}$,099231 n	m sin M	1,015851 n
sin b	$\bar{1}$,916620	cos $b = m$ cos M	$\bar{1}$,751797 n
sin A	$\bar{1}$,996543	cos M	$\bar{1}$,992795
		tg M	$\bar{1}$,264054

M =	10°24′28″,4	sin (c — M)	$\bar{1}$,900714 n
c — M =	232°42′55″,2	m	$\bar{1}$,759002 n
		cos (c — M)	$\bar{1}$,782312 n

sin a sin B	$\bar{1}$,913163
sin a cos B	$\bar{1}$,659716
sin B	$\bar{1}$,941158
tg B	0,253447
sin a	$\bar{1}$,972005
cos a	$\bar{1}$,541314
tg a	0,430691

$$B = 60^\circ 50' 35'',0.$$
$$a = 69^\circ 38' 52'',6.$$

Vérification par la formule :

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

$$\frac{a-b}{2}=-27^\circ21'56'',9 \qquad \frac{A-B}{2}=18^\circ11'17'',5$$

$$\frac{c}{2}=121^\circ33'41'',8 \qquad \frac{A+B}{2}=79^\circ\ 1'52'',5$$

$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$ $\quad \bar{1},713989\,n$

$\sin\frac{A+B}{2}$ $\quad \bar{1},991993$

$\bar{1},705982\,n$

$\operatorname{tg}\frac{c}{2}$ $\quad 0,211633\,n$

$\sin\frac{A-B}{2}$ $\quad \bar{1},494348$

$\bar{1},705981\,n$

IV

Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux :

$$a = 69^\circ 38' 52'',8$$
$$b = 124^\circ 22' 46'',4$$
$$A = 97^\circ 13' 10'',0.$$

sin A	$\bar{1}$,996543	sin φ	$\bar{1}$,913163
sin b	$\bar{1}$,916620		
cos A	$\bar{1}$,079231 n	cos φ sin M	$\bar{1}$,015851 n
cos b	$\bar{1}$,751797 n	cos φ cos M	$\bar{1}$,751797 n
		cos M	$\bar{1}$,992795 n
M = 190°24′28″,4		tg M	$\bar{1}$,264054
N = 192°38′38″,2		cos φ	$\bar{1}$,759002
sin φ	$\bar{1}$,913163		
sin a	$\bar{1}$,972005	cotg φ sin N	$\bar{1}$,186068 n
sin B	$\bar{1}$,941158	cotg φ cos N	$\bar{1}$,835177 n
		cos N	$\bar{1}$,989338 n
cos a	$\bar{1}$,541313	tg N	$\bar{1}$,350891
cos φ	$\bar{1}$,759002	cotg φ	$\bar{1}$,845839
cos (c — M)	$\bar{1}$,782311		
tg φ	0,154161		
tg a	0,430692		
cos (C — N)	$\bar{1}$,723469		
sin (C — N)	$\bar{1}$,928709 ±		
cos B	$\bar{1}$,687711 ±	sin (c — M)	$\bar{1}$,900714 ±
tg B	0,253447 ±	tg (c — M)	0,118403 ±

Commençant par déterminer C :

$$C - N = \pm 58^\circ 3' 39'',6$$

$$B = \begin{cases} 60^\circ 50' 35'',0 \\ 119^\circ\ 9' 25'',0 \end{cases}$$

$$c - M = \pm 52^\circ 42' 55'',3$$

Finalement, on a les deux solutions :

$B = 60°50'35'',0$	$B = 119°\ 9'25'',0$
$c = 243°\ 7'23'',7$	$c = 137°41'33'',1$
$C = 250°42'17'',8$	$C = 134°34'58'',6.$

Pour vérifier cette seconde solution, employons la formule

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2};$$

$\sin\frac{a}{2} = \sin\ 34°49'26''4$	$\bar{1},756680$	$\bar{2},884468\ n$
$\sin\frac{B-C}{2} = \sin -\ 7°42'46'',8$	$\bar{1},127788\ n$	
$\cos\frac{A}{2} = \cos\ 48°36'35'',0$	$\bar{1},820323$	$\bar{2},884468\ n$
$\sin\frac{b-c}{2} = \sin -\ 6°39'23'',35$	$\bar{1},064145\ n$	

V

Résoudre un triangle géodésique tracé sur une sphère de 6370 kilomètres de rayon, connaissant les longueurs des côtés :

$$\alpha = 700^{km}$$
$$\beta = 550^{km}$$
$$\gamma = 300^{km}.$$

On résout d'abord le triangle rectiligne de côtés α, β, γ.

$\varphi =$	775	$\varphi - \alpha$	$1,8750613$
$\varphi - \alpha =$	75	$\varphi - \beta$	$2,3521825$
$\varphi - \beta =$	225	$\varphi - \gamma$	$2,6766936$
$\varphi - \gamma =$	475	φ	$2,8893017$
$\frac{A_0}{2} =$	$53^\circ 35' 32'',64$		$4,0146357$
			$2,0073179$
$\frac{B_0}{2} =$	$24^\circ 19' 22'',14$	$\mathrm{tg}\,\frac{A_0}{2}$	$0,1322566$
$\frac{C_0}{2} =$	$11^\circ 5' 5'',24$	$\mathrm{tg}\,\frac{B_0}{2}$	$\bar{1},6551354$
$A_0 =$	$107^\circ 11' 5'',28$	$\mathrm{tg}\,\frac{C_0}{2}$	$\bar{1},3306243$
$B_0 =$	$48^\circ 38' 44'',28$		
$C_0 =$	$24^\circ 10' 10'',48$	R	$3,8041394$
Somme $=$	$180^\circ 0' 0'',04$	S_0	$4,8966196$
		$\frac{S_0}{R^2}$	$\bar{3},2883408$
		Radian en secondes	$5,3144251$
		$\left(\frac{S_0}{R^2}\right)''$	$2,6027659$

Le théorème de Legendre donne donc

$$\sigma = 400'',65,$$

et chacun des angles est à augmenter de 133'',55.

En tenant compte des termes d'ordre supérieur, on a plus exactement

$$\begin{aligned} \sigma &= 401'',01 \\ A &= A_0 + 133'',64 = 107^\circ 13' 18'',92 \\ B &= B_0 + 133'',67 = 48^\circ 40' 57'',95 \\ C &= C_0 + 133'',70 = 24^\circ 12' 24'',18. \end{aligned}$$

La solution directe, obtenue en calculant *a*, *b*, *c* et appliquant les formules relatives au premier cas, donnerait

$$\begin{aligned} A &= 107^\circ 13' 18'',89 \\ B &= 48^\circ 40' 57'',93 \\ C &= 24^\circ 12' 24'',19, \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma = 6' 41'',01$$

comme plus haut.

CHAPITRE II

QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

On a déjà pu se rendre compte par la théorie des triangles géodésiques combien il était avantageux, dans certains cas, de substituer à des formules rigoureuses des développements en série rapidement convergents, quand on connaît à l'avance une valeur suffisamment approchée de la quantité qu'on veut calculer : et il est manifeste en effet que a étant une valeur approchée de x, il faut employer moins de chiffres dans les calculs pour obtenir la différence $x - a$ que pour calculer directement x avec la même précision.

Nous allons passer ici en revue quelques développements en série qui trouvent en Astronomie une continuelle application.

Ces développements sont en général ordonnés par rapport aux puissances croissantes de petites quantités, et peuvent s'obtenir par simple application de la formule de Taylor : il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, que le développement suive une loi générale simple, facile à formuler, car les premiers termes seuls sont à retenir comme utiles, si le développement doit avoir une valeur pratique.

Développements en série. — Soit d'abord à déterminer x par l'équation

$$\sin x = \sin \alpha + h,$$

h étant petit, de sorte que α est une valeur approchée de x.

On a

$$x = \operatorname{arc} \sin (\sin \alpha + h) = \operatorname{arc} \sin (t + h),$$

en faisant

$$\sin \alpha = t.$$

Pour appliquer la formule de Taylor, il faut calculer les dérivées successives de α par rapport à t, ce qui donne

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{d^3\alpha}{dt^3} = \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^3 \alpha},$$

$$\frac{d^4\alpha}{dt^4} = \frac{9 \operatorname{tg} \alpha + 15 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \cdots\cdots$$

Donc :

$$x = \alpha + \frac{h}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)^2 + \frac{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{6} \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)^3$$
$$+ \frac{3 \operatorname{tg} \alpha + 5 \operatorname{tg}^3 \alpha}{8} \left(\frac{h}{\cos \alpha}\right)^4 + \cdots\cdots;$$

on voit immédiatement que si $\cos \alpha$ est petit en valeur absolue, par suite $\operatorname{tg} \alpha$ grand, cette formule perd toute valeur pratique : ceci s'explique sans peine, tout comme pour les relations différentielles du précédent Chapitre.

De même, si l'on a

$$\cos x = \cos \alpha + h,$$

on obtient, par une transformation évidente du résultat ci-dessus,

$$x = \alpha - \frac{h}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \alpha \left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^2 - \frac{1 + 3 \operatorname{cotg}^2 \alpha}{6} \left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^3$$
$$- \frac{3 \operatorname{cotg} \alpha + 5 \operatorname{cotg}^3 \alpha}{8} \left(\frac{h}{\sin \alpha}\right)^4 - \cdots,$$

à la condition que $\sin \alpha$ n'ait pas une valeur absolue trop petite.

De même encore, l'équation

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha + h$$

conduira par des calculs tout semblables au développement

$$x = \alpha + \cos^2\alpha . h - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos^2\alpha . h^2 - \frac{1}{6} (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha) \cos^2\alpha . h^3$$
$$+ \frac{1}{16} (\sin 2\alpha + 2 \sin 4\alpha + \sin 6\alpha) \cos^2\alpha . h^4 + \cdots\cdots,$$

toujours applicable.

Supposons maintenant que l'on ait à calculer les deux inconnues r et x par les équations

$$\begin{cases} r \sin x = a \sin \alpha, \\ r \cos x = 1 + a \cos \alpha. \end{cases}$$

Le problème est toujours possible, et l'on peut, ce que nous ferons, supposer r positif.

En faisant $i = \sqrt{-1}$, on a

$$r(\cos x + i \sin x) = 1 + a(\cos \alpha + i \sin \alpha);$$

si donc le module de a est inférieur à 1, on peut écrire, d'après le développement connu de $\log(1 + z)$ et la formule de Moivre,

$$\begin{aligned} \log r + i(x + 2k\pi) = {} & a(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ & - \frac{a^2}{2}(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \\ & + \frac{a^3}{3}(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) \\ & - \dots\dots\dots; \end{aligned}$$

$\log r$ désigne ici le logarithme népérien arithmétique de r, et k est un entier convenablement choisi.

Puisque l'on a $|a| < 1$, on a aussi $\cos x > 0$, et par suite, on peut choisir x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; on a alors $k = 0$, puisqu'il en est évidemment ainsi pour $a = 0$, et que k ne peut pas varier brusquement. Egalant donc les parties réelles et imaginaires dans les deux membres de l'équation précédente, il vient

$$x = a \sin \alpha - \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha + \frac{a^3}{3} \sin 3\alpha - \frac{a^4}{4} \sin 4\alpha + \dots\dots,$$

$$\log r = a \cos \alpha - \frac{a^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^3}{3} \cos 3\alpha - \frac{a^4}{4} \cos 4\alpha + \dots\dots,$$

et l'on a ainsi les développements en série remarquables de x et de $\log r$: on peut observer d'ailleurs que ces quantités sont définies séparément par les égalités :

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha} \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right), \quad r = +\sqrt{1 + 2a \cos \alpha + a^2}.$$

Si l'on substitue les logarithmes vulgaires aux logarithmes népériens, il faudra naturellement multiplier ces derniers par le module M des premiers.

On ramène facilement au précédent le problème de calculer x par la relation

$$\operatorname{tg} x = p \operatorname{tg} \alpha.$$

On a en effet

$$\operatorname{tg}(x-\alpha) = \frac{(p-1)\operatorname{tg}\alpha}{1+p\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{(p-1)\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+p\sin^2\alpha} = \frac{(p-1)\sin 2\alpha}{(p+1)-(p-1)\cos 2\alpha}:$$

faisant $\frac{1-p}{1+p} = q$, il vient donc

$$\operatorname{tg}(\alpha - x) = \frac{q\sin 2\alpha}{1+q\cos 2\alpha}.$$

Supposons $|q| < 1$, c'est-à-dire $p > 0$ (dans le cas contraire, on changerait p en $-p$, en même temps que α en $-\alpha$), et prenons $|\alpha - x| < \frac{\pi}{2}$: on a le développement d'un usage constant

$$x = \alpha - q\sin 2\alpha + \frac{q^2}{2}\sin 4\alpha - \frac{q^3}{3}\sin 6\alpha + \frac{q^4}{4}\sin 8\alpha - \ldots..$$

Observons que si p se change en $\frac{1}{p}$, q change simplement de signe.

Si, en particulier, $p = \cos\omega$, on a $q = \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}$, et

$$x = \alpha - \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\omega}{2}\sin 4\alpha - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\frac{\omega}{2}\sin 6\alpha + \ldots..;$$

et si $p = \operatorname{séc}\omega$,

$$x = \alpha + \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{\omega}{2}\sin 4\alpha + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^6\frac{\omega}{2}\sin 6\alpha + \ldots$$

On voit que ces derniers résultats trouvent une application immédiate dans certains problèmes de Trigonométrie sphérique, puisque, dans un triangle rectangle en A, on a

$$\operatorname{tg} c = \cos B \operatorname{tg} a, \qquad \operatorname{tg} a = \operatorname{séc} B \operatorname{tg} c.$$

Retour sur le troisième cas de résolution des triangles sphériques. — Dans le même ordre d'idées, revenons sur le troisième cas de résolution des triangles sphériques, celui où l'on donne l'angle A et les deux côtés b, c qui le comprennent, mais en supposant que l'un de ces côtés, c par exemple, est petit.

A la limite, pour $c = 0$, on peut prendre $a = b$, $B = \pi - A$, $C = 0$; nous chercherons donc à calculer directement C avec les différences $\pi - A - B = \varepsilon$, et $a - b$.

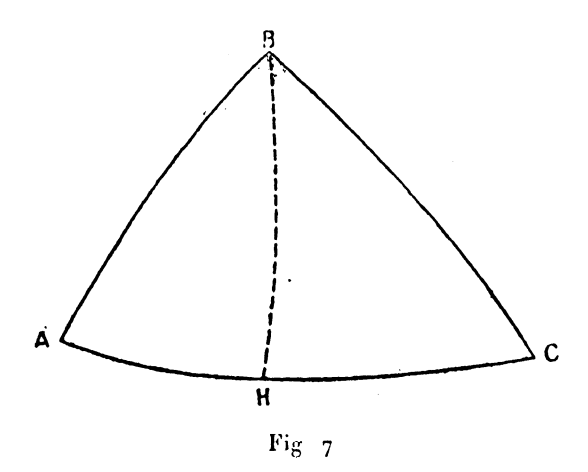


Fig 7

Menons un arc de grand cercle BH perpendiculaire sur le côté AC, de sorte que les deux triangles ABH, BCH soient rectangles en H (*fig.* 7), et faisons

$$AH = \varphi, \qquad BH = \omega, \qquad HBC = \frac{\pi}{2} - \rho.$$

Le triangle ABH détermine ω et φ par les relations

$$(a_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin\omega = \sin c \sin A, \\ \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} c \cos A, \end{array} \right.$$

auxquelles il convient d'ajouter, pour préciser,

$$\cos\omega \cos\varphi = \cos c;$$

le signe de $\cos\omega$, par exemple, reste arbitraire, mais celui de $\cos\varphi$ est alors fixé par cette dernière formule; si, comme nous le supposons, c est petit, on prendra de même ω et φ petits.

Le triangle BHC donne à son tour

$$(a_2) \qquad \operatorname{tg} \rho = \sin \omega \operatorname{cotg} (b - \varphi),$$

et l'on choisira l'angle ρ inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, ainsi qu'il est légitime.

L'angle ABH est égal à $B - \frac{\pi}{2} + \rho$, et dans le triangle rectangle ABH, la somme des angles en A et B vaut $\frac{\pi}{2} + \rho - \varepsilon$; par suite, l'analogie de Néper correspondante donne

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho - \varepsilon}{2}\right) = \frac{\cos \frac{\omega - \varphi}{2}}{\cos \frac{\omega + \varphi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$(a_3) \qquad \operatorname{tg} \frac{\varepsilon - \rho}{2} = - \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Dans le triangle rectangle BCH, la différence des côtés BC et CH vaut $a - b + \varphi$, de sorte que l'analogie de Néper correspondante donne encore

$$(a_4) \qquad \operatorname{tg} \frac{a - b + \varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\rho}{2}.$$

Enfin, dans ce même triangle, on a

$$(a_5) \qquad \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} \omega \operatorname{cos\acute{e}c} (b - \varphi),$$

en ajoutant pour préciser la relation

$$\cos C = \cos \rho \cos \omega.$$

Les six formules (a) résolvent complètement le problème, et cette solution est toujours valable, quelle que soit la grandeur de c. Revenons à l'hypothèse de c petit, et supposons que l'on néglige le cube de cet angle; ω et φ sont inférieurs à c en valeur absolue, et les angles ρ et C restent du même ordre de grandeur que c, sauf dans le cas où l'angle $b - \varphi$ serait voisin de 0 ou π; écartant d'abord ce cas, on aura simplement

$$(b) \quad \begin{cases} \omega = c \sin A, & \varphi = c \cos A, & \rho = \omega \operatorname{cotg} (b - \varphi), \\ \varepsilon = \rho - \dfrac{\omega\varphi}{2}, & a - b = -\varphi + \dfrac{\omega\rho}{2}, & C = \omega \operatorname{cos\acute{e}c} (b - \varphi); \end{cases}$$

ou bien encore, au même degré d'approximation,

$$(b')\quad\left\{\begin{aligned}&\omega = c\sin A,\qquad \varphi = c\cos A,\\&\varepsilon = \omega\,\mathrm{cotg}\, b + \frac{\omega\varphi}{2}(1 + 2\,\mathrm{cotg}^2 b),\\&a - b = -\varphi + \frac{\omega^2}{2}\,\mathrm{cotg}\, b,\\&C = \omega\,\mathrm{cos\acute{e}c}\, b + \omega\varphi\,\mathrm{cotg}\, b\,\mathrm{cos\acute{e}c}\, b.\end{aligned}\right.$$

Si l'on négligeait le carré de c, on aurait les simples formules différentielles

$$(c)\quad \varepsilon = c\sin A\,\mathrm{cotg}\, b,\quad a - b = -c\cos A,\quad C = c\sin A\,\mathrm{cos\acute{e}c}\, b.$$

Si l'angle $b - \varphi$ est voisin de 0 ou π, les angles ρ et C peuvent grandir beaucoup; mais d'après la façon dont on a choisi ρ, le facteur $\mathrm{tg}\,\frac{\rho}{2}$ restera inférieur à l'unité en valeur absolue; on écrira donc, avec une erreur relative de l'ordre de c^2,

$$(d)\quad\left\{\begin{aligned}&\omega = c\sin A,\ \varphi = c\cos A,\ \mathrm{tg}\,\rho = \omega\,\mathrm{cotg}\,(b - \varphi),\\&\varepsilon = \rho - \frac{\omega\varphi}{2},\quad a - b = -\varphi + \omega\,\mathrm{tg}\frac{\rho}{2},\quad \mathrm{tg}\, C = \omega\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,(b - \varphi);\end{aligned}\right.$$

et l'on pourra, dans les mêmes conditions d'exactitude, réduire ε à ρ, si l'on regarde l'angle ρ comme fini.

CHAPITRE III

COORDONNÉES ET PROBLÈMES RELATIFS AUX COORDONNÉES

Systèmes de cordonnées. — Les systèmes d'axes de coordonnées dont on fait usage en Astronomie, sont toujours rectangulaires.

Pour définir un tel système, il faut se donner :

1° son origine O ;

2° la direction de l'un des trois axes, Oz ;

3° dans le plan Oxy, *plan fondamental* du système, perpendiculaire à Oz, la direction de l'axe Ox ;

4° l'orientation du système, qui achève de déterminer la direction du troisième axe Oy. L'orientation est *directe* ou *rétrograde* suivant qu'un observateur placé sur l'axe Oz, les pieds en O, la tête en z, voit l'axe Ox venir s'appliquer sur l'axe Oy en décrivant $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct, c'est-à-dire de la droite vers la gauche, ou dans le sens opposé, dit rétrograde.

Le sens direct, arbitraire en géométrie, est ainsi fixé une fois pour toutes, en Astronomie : c'est celui de la droite vers la gauche.

Une sphère décrite du point O, origine des coordonnées, comme centre, est la *sphère céleste* de centre O : elle sert, comme nous l'avons déjà dit, à représenter les directions issues du point O.

Un point M est défini par ses *coordonnées rectilignes* x, y, z dans le système d'axes choisi : mais le plus souvent, on substitue à ces coordonnées les *coordonnées polaires*. Nous

allons définir celles-ci d'une façon tout à fait générale, susceptible de s'adapter à tous les cas particuliers.

Coordonnées polaires. — Sur la droite indéfinie OM, choisissons un sens positif Ot (*fig.* 8) ; puis, M′ étant la projection de M sur le plan Oxy, choisissons de même sur la droite indéfinie OM′ un sens positif Ou. Les coordonnées polaires du point M sont alors :

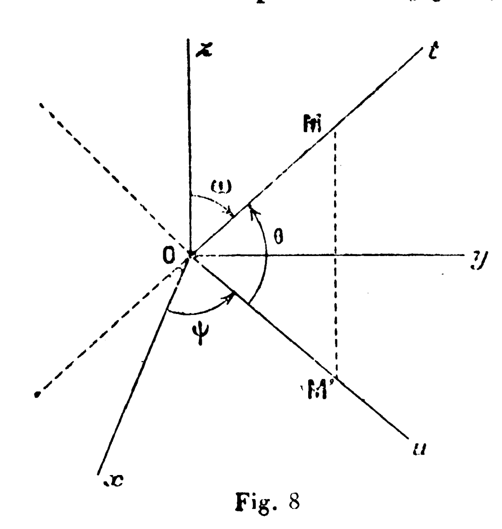


Fig. 8

1° la valeur algébrique r du vecteur $\overline{\text{OM}}$, compté positivement dans le sens Ot ;

2° l'angle ψ que fait Ox avec Ou, compté dans le sens qui amène Ox sur Oy en décrivant $\frac{\pi}{2}$;

3° l'angle θ que fait Ou avec Ot, compté dans le sens qui amène Ou sur Oz en décrivant $\frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions, il est manifeste que l'on a toujours

$$x = r \cos \theta \cos \psi, \quad y = r \cos \theta \sin \psi, \quad z = r \sin \theta.$$

Dans certains cas, on utilise, au lieu de θ, son complément ω, c'est-à-dire l'angle de Oz avec Ot, compté dans le sens qui amène Oz sur Ou en décrivant $\frac{\pi}{2}$; on a toujours

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Fig. 9

La figure 9 représente sur la sphère céleste de centre O les traces des axes de coordonnées et les directions Ot, Ou : elle met en évidence les coordonnées angulaires de M.

Le point z est le *pôle* du système de coordonnées.

La définition précédente laisse subsister une certaine ambiguïté, puisque le choix des directions Ot et Ou est arbitraire : si l'on change le sens de Ot, r change de signe et θ augmente de π ; si l'on change celui de Ou, ψ augmente de π, et θ se change en $\pi - \theta$; si enfin Ot et Ou changent tous deux de sens, r change de signe, ψ augmente de π et θ change de signe.

Cette même ambiguïté se présente quand on veut calculer r, θ et ψ connaissant x, y, z : les formules ci-dessus fournissent immédiatement tg ψ, puis tg θ et r, mais en laissant arbitraires les signes de r et de cos θ.

D'une façon très générale, on fait en sorte que r soit positif et θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ou ω entre o et π ; en d'autres termes on prend pour Ot et Ou les directions OM et OM′ elles-mêmes : dans ces conditions, cos θ ou sin ω est toujours positif.

Toutefois, ce choix que nous adopterons presque toujours n'a rien d'essentiellement obligatoire, et nous pourrons quelquefois, pour conserver la généralité des formules, en faire un autre : quand ce fait exceptionnel se produira, il sera toujours spécifié explicitement.

Une *direction* OM n'a que deux coordonnées, ψ et θ, qui sont les coordonnées angulaires d'un point quelconque de la demi-droite indéfinie OM, à la condition que le rayon vecteur en soit pris prositivement. Tout ce qui précède s'applique encore à ce cas particulier.

Changement de l'origine. — L'usage des coordonnées en Astronomie dépend de la solution de quelques problèmes généraux, toujours les mêmes, que nous allons passer en revue dès maintenant. En premier lieu, nous étudierons le problème du changement d'origine, c'est-à-dire le passage d'un système de coordonnées Oxyz à un second système O′$x'y'z'$, l'origine changeant, mais les directions des axes restant les mêmes. Soient x, y, z d'une part, x', y', z' d'autre part, les coordonnées rectilignes d'un même point M dans les deux systèmes; soient de plus x_0, y_0, z_0 les coordonnées de

l'ancienne origine O par rapport aux nouveaux axes $O'x'y'z'$; s'il ne s'agit que de coordonnées rectilignes, on a, pour résoudre le problème, les relations simples

$$(1) \qquad x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0, \quad z' = z + z_0.$$

Mais ce sont en général les coordonnées polaires que l'on transforme : les relations précédentes deviennent alors, avec les notations générales adoptées,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} r' \cos \theta' \cos \psi' &= r \cos \theta \cos \psi + x_0, \\ r' \cos \theta' \sin \psi' &= r \cos \theta \sin \psi + y_0, \\ r' \sin \theta' &= r \sin \theta + z_0 ; \end{aligned} \right.$$

si l'on veut, on pourra introduire les coordonnées polaires de l'ancienne origine O par rapport aux nouveaux axes, en faisant

$$(3) \qquad x_0 = r_0 \cos \theta_0 \cos \psi_0, \quad y_0 = r_0 \cos \theta_0 \sin \psi_0, \quad z_0 = r_0 \sin \theta_0.$$

On voit que les formules (2) résolvent la question d'une façon immédiate ; elles donnent sans peine tg ψ', tg θ' et r' successivement, et il n'y a aucune ambiguïté si les signes de r' et cos θ' sont fixés ; en général ces quantités sont prises positivement comme nous l'avons déjà dit. On peut simplifier un peu le calcul logarithmique en observant que les deux premières équations (2) peuvent être remplacées, en appelant λ un angle arbitraire, par les suivantes

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} r' \cos \theta' \cos(\psi' - \lambda) &= r \cos \theta \cos(\psi - \lambda) + \left\{ \begin{matrix} x_0 \cos \lambda + y_0 \sin \lambda \\ r_0 \cos \theta_0 \cos(\psi_0 - \lambda) \end{matrix} \right\}, \\ r' \cos \theta' \sin(\psi' - \lambda) &= r \cos \theta \sin(\psi - \lambda) + \left\{ \begin{matrix} -x_0 \sin \lambda + y_0 \cos \lambda \\ r_0 \cos \theta_0 \sin(\psi_0 - \lambda) \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \right.$$

où les quantités placées entre accolades sont équivalentes. On voit en effet qu'en faisant par exemple $\lambda = \psi$, ou bien $\lambda = \psi_0$, on obtient une légère simplification, l'un des seconds membres se réduisant à un seul terme.

Cette solution convient toutes les fois que r, r' et r_0 sont du même ordre de grandeur, ainsi qu'il arrive quand on passe des coordonnées héliocentriques d'une planète à ses coordonnées géocentriques, ou inversement. Mais si la distance r_0 est petite par rapport à r et r', comme c'est le cas dans les problèmes de

parallaxe, il est clair que r', ψ', θ' diffèrent peu de r, ψ, θ : il vaut donc mieux chercher à déterminer directement les différences $\psi' - \psi$, $\theta' - \theta$, $r' - r$, que nous appellerons $\Delta\psi$, $\Delta\theta$, Δr.

Les formules (4) où l'on fait $\lambda = \psi$, donnent d'abord

$$(5)\quad \begin{cases} r' \cos\theta' \cos\Delta\psi = r\cos\theta + \left\{ \begin{matrix} x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi \\ r_0 \cos\theta_0 \cos(\psi_0 - \psi) \end{matrix} \right\}, \\ r' \cos\theta' \sin\Delta\psi = \left\{ \begin{matrix} - x_0 \sin\psi + y_0 \cos\psi \\ r_0 \cos\theta_0 \sin(\psi_0 - \psi) \end{matrix} \right\}, \end{cases}$$

d'où

$$(6)\quad \operatorname{tg}\Delta\psi = \frac{- x_0 \sin\psi + y_0 \cos\psi}{r\cos\theta + x_0\cos\psi + y_0 \sin\psi} = \frac{r_0 \cos\theta_0 \sin(\psi_0 - \psi)}{r\cos\theta + r_0\cos\theta_0 \cos(\psi_0 - \psi)}.$$

Ajoutons maintenant les équations (5), après multiplication de la seconde par $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta\psi$, ainsi que nous avons déjà fait précédemment ; on a

$$(7)\quad r'\cos\theta' = r\cos\theta + t_0,$$

en posant

$$(8)\quad t_0 = \frac{x_0\cos(\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi) + y_0\sin(\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\psi} = \frac{r_0\cos\theta_0\cos(\psi_0 - \psi - \frac{1}{2}\Delta\psi)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\psi}.$$

Joignant l'équation (7) à la troisième équation (2), des combinaisons évidentes donnent :

$$(9)\quad \begin{cases} r'\cos\Delta\theta = r + t_0\cos\theta + z_0\sin\theta, \\ r'\sin\Delta\theta = \quad - t_0\sin\theta + z_0\cos\theta, \end{cases}$$

d'où d'abord

$$(10)\quad \operatorname{tg}\Delta\theta = \frac{- t_0\sin\theta + z_0\cos\theta}{r + t_0\cos\theta + z_0\sin\theta};$$

puis, combinant les équations (9) comme nous avons combiné les équations (5), c'est-à-dire les ajoutant après multiplication de la seconde par $\operatorname{tg}\frac{\Delta\theta}{2}$, on a enfin

$$(11)\quad \Delta r = \frac{t_0\cos\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right) + z_0\sin\left(\theta + \frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\theta}$$

Mais, pour le calcul logarithmique, il est préférable de former le rapport $\frac{r'}{r}$ dont le logarithme est $\Delta \log r$: à cet effet on multiplie l'équation (7) par z_0, l'équation (2) par t_0, et l'on retranche, ce qui donne

$$(12) \qquad \frac{r'}{r} = \frac{-t_0 \sin \theta + z_0 \cos \theta}{-t_0 \sin \theta' + z_0 \cos \theta'};$$

on peut aussi écrire, en élevant au carré les relations (9) et ajoutant :

$$(13) \qquad \frac{r'}{r} = \sqrt{1 + 2\frac{t_0 \cos \theta + z_0 \sin \theta}{r} + \frac{t_0^2 + z_0^2}{r^2}}.$$

Les formules (6), (10), (11) ou (12) ou (13) résolvent complètement le problème proposé : elles sont d'ailleurs valables dans tous les cas, mais il ne convient, encore une fois, de les employer que dans les problèmes de parallaxe.

Pour faciliter leur calcul, servons-nous des coordonnées polaires r_0, ψ_0, θ_0 de O : si elles ne sont pas données directement, on déterminera simplement ψ_0 et $r_0 \cos \theta_0$ par les deux premières équations (3), et alors nous ferons $r_0 \cos \theta_0 = u_0$. Introduisons en outre un angle auxiliaire γ défini par la relation

$$(14) \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \theta_0 \cos \frac{1}{2} \Delta\psi}{\cos\left(\psi_0 - \psi - \frac{1}{2} \Delta\psi\right)} = \frac{z_0 \cos \frac{1}{2} \Delta\psi}{u_0 \cos\left(\psi_0 - \psi - \frac{1}{2} \Delta\psi\right)},$$

puis posons

$$(15) \qquad p = \frac{r_0 \cos \theta_0}{r \cos \theta} = \frac{u_0}{r \cos \theta}, \qquad q = \frac{r_0 \sin \theta_0}{r \sin \gamma} = \frac{z_0}{r \sin \gamma}.$$

Dans ces conditions, on a immédiatement :

$$(16) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \Delta\psi = \dfrac{p \sin (\psi_0 - \psi)}{1 + p \cos (\psi_0 - \psi)}, \\[2ex] \operatorname{tg} \Delta\theta = \dfrac{q \sin (\gamma - \theta)}{1 + q \cos (\gamma - \theta)}, \\[2ex] \dfrac{\Delta r}{r} = q \dfrac{\cos\left(\gamma - \theta - \dfrac{\Delta\theta}{2}\right)}{\cos \frac{1}{2} \Delta\theta}, \\[2ex] \dfrac{r'}{r} = \dfrac{\sin (\gamma - \theta)}{\sin (\gamma - \theta')} = \sqrt{1 + 2q \cos (\gamma - \theta) + q^2}; \end{cases}$$

il suffit d'observer que $t_0 = z_0 \cot\gamma$ pour tomber immédiatement sur ces dernières expressions.

D'après le Chapitre II, $\Delta\psi$, $\Delta\theta$ et $\log\frac{r'}{r}$ peuvent être immédiatement développés en séries ordonnées suivant les puissances des petites quantités p et q : mais il est inutile d'écrire ces développements de peu d'usage dans le problème actuel.

Avant d'aller plus loin, nous observerons que certains problèmes de parallaxe se présentent de la façon suivante : on donne ψ, θ et r', et il s'agit de calculer ψ', θ', et r. La solution directe de cette question est facile, mais sans intérêt : il vaut mieux, profitant de l'hypothèse sur la petitesse de $\frac{r_0}{r}$, procéder par approximations successives rapidement convergentes, en utilisant, parmi les formules précédemment établies, les suivantes :

$$(17)\left\{\begin{aligned}
&\sin\Delta\psi = \frac{r_0\cos\theta_0\sin(\psi_0-\psi)}{r'\cos\theta'},\\
&\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\theta_0\cos\frac{1}{2}\Delta\psi}{\cos\left(\psi_0-\psi-\frac{1}{2}\Delta\psi\right)},\\
&\sin\Delta\theta = \frac{r_0\sin\theta_0\sin(\gamma-\theta)}{r'\sin\gamma},\\
&\frac{r}{r'} = \frac{\sin(\gamma-\theta')}{\sin(\gamma-\theta)} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta r}{r'} = \frac{r_0\sin\theta_0\cos\left(\gamma-\theta-\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{r'\sin\gamma\cos\frac{1}{2}\Delta\theta};
\end{aligned}\right.$$

la première et la troisième de ces équations ne sont autres que les secondes des relations (5) et (9).

Pour employer ces formules, on fera d'abord $\theta' = \theta$ dans la première ; on aura ainsi une valeur approchée de $\Delta\psi$, avec laquelle on calculera $\Delta\theta$ et par suite θ' ; avec cette nouvelle valeur de θ' on recommencera le calcul autant de fois qu'il sera nécessaire, et si $\frac{r_0}{r'}$ est suffisamment petit, deux approximations suffiront.

Quand le rapport $\frac{r_0}{r}$ est assez petit pour qu'on puisse négli-

ger son carré, on peut se borner à prendre pour $\Delta\psi$, $\Delta\theta$ et Δr les valeurs approchées $d\psi$, $d\theta$, dr fournies par les formules différentielles suivantes, obtenues en réduisant les formules (6), (10), (11), (16) à leurs parties principales :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \cos\theta \, . \, d\psi &= \frac{-x_0 \sin\psi + y_0 \cos\psi}{r} = \frac{r_0 \cos\theta_0}{r} \sin(\psi_0 - \psi), \\ d\theta &= \frac{-(x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi)\sin\theta + z_0 \cos\theta}{r} \\ &= \frac{r_0}{r}[\sin\theta_0 \cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \cos(\psi_0 - \psi)] \\ &= \frac{r_0 \sin\theta_0}{r \sin\gamma} \sin(\gamma - \theta), \quad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\cos(\psi_0 - \psi)}, \\ \frac{dr}{r} &= \frac{(x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi)\cos\theta + z_0 \sin\theta}{r} \\ &= \frac{r_0}{r}[\sin\theta_0 \sin\theta + \cos\theta_0 \cos\theta \cos(\psi_0 - \psi)] \\ &= \frac{r_0 \sin\theta_0}{r \sin\gamma} \cos(\gamma - \theta); \end{aligned} \right.$$

pour le calcul logarithmique, on observera que les logarithmes étant décimaux, on a $d\,(\log r) = M\dfrac{dr}{r}$, M désignant le module.

Ces mêmes formules, où l'on substitue r' à r, remplacent aussi bien les formules (17) dans la résolution du problème correspondant, quand le carré de $\dfrac{r_0}{r}$ est négligeable.

Les relations différentielles (18) perdent leur valeur si $\cos\theta$ devient très petit en valeur absolue. C'est d'ailleurs le seul cas où ceci puisse arriver, car il n'y a rien à craindre, malgré l'apparence, si $\sin\gamma$ devient très petit : en effet, il suffit pour le voir de remplacer le rapport $\dfrac{\sin\theta_0}{\sin\gamma}$ par la quantité égale $\dfrac{\cos\theta_0 \cos(\psi_0 - \psi)}{\cos\gamma}$.

Supposant donc θ voisin de $\pm\dfrac{\pi}{2}$, reprenons le calcul conformément à la méthode de Fabritius, et tout d'abord, développons la solution rigoureuse du problème sous une nouvelle forme. Il est clair que l'on peut obtenir les formules (18)

directement en partant des relations (2) écrites sous la forme

$$\begin{aligned} d\,(r\cos\theta\cos\psi) &= x_0,\\ d\,(r\cos\theta\sin\psi) &= y_0,\\ d\,(r\sin\theta) &= z_0; \end{aligned}$$

il suffit de différentier et de résoudre par rapport à $d\psi$, $d\theta$, dr.

Si donc nous appelons P, Q, R les valeurs de $\cos\theta\, d\psi$, $d\theta$, $\frac{dr}{r}$, que donnent les équations (18), on a inversement

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x_0}{r} &= -P\sin\psi - Q\sin\theta\cos\psi + R\cos\theta\cos\psi,\\ \frac{y_0}{r} &= P\cos\psi - Q\sin\theta\sin\psi + R\cos\theta\sin\psi,\\ \frac{z_0}{r} &= \phantom{-P\cos\psi -{}} Q\cos\theta + R\sin\theta; \end{aligned}\right.$$

par suite, ainsi que le montrent d'ailleurs les valeurs mêmes de P, Q, R,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{-x_0\sin\psi + y_0\cos\psi}{r} &= P,\\ \frac{x_0\cos\psi + y_0\sin\psi}{r} &= -Q\sin\theta + R\cos\theta,\\ \frac{t_0}{r} &= P\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\psi}{2} - Q\sin\theta + R\cos\theta, \end{aligned}\right.$$

et les formules (6), (10) et (11) deviennent

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\Delta\psi &= \frac{P}{\cos\theta\,(1+R) - Q\sin\theta},\\ \mathrm{tg}\,\Delta\theta &= \frac{Q - P\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\psi}{2}}{1 + R + P\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\psi}{2}},\\ \frac{\Delta r}{r} &= R + P\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\psi}{2} + \left(Q - P\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\psi}{2}\right)\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\theta}{2}. \end{aligned}\right.$$

On voit par là qu'on peut toujours commencer par calculer les quantités P, Q, R qui correspondent aux formules différentielles, et qu'il est facile ensuite d'obtenir rigoureusement $\Delta\psi$, $\Delta\theta$ et Δr.

Quand $\frac{r_0}{r}$ est une petite quantité du premier ordre, P, Q, R

sont eux-mêmes toujours du premier ordre, de sorte qu'en négligeant les quantités du second ordre, les relations (19) ne sont autres que les formules (18), si $\cos\theta$ est fini. Mais si $\cos\theta$ est lui-même une quantité de premier ordre, on voit que $\Delta\psi$ est une quantité finie, $\Delta\theta$ et Δr restant du premier ordre; donc en tolérant toujours une erreur relative du premier ordre, on doit écrire alors

$$(20)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\Delta\psi = \dfrac{P}{\cos\theta - Q\sin\theta} = P\,\text{séc}\,(\theta + Q), \\ \Delta\theta = Q - P\sin\theta\,\operatorname{tg}\dfrac{\Delta\psi}{2}, \\ \dfrac{\Delta r}{r} = R, \end{cases}$$

en faisant d'ailleurs, si l'on veut, $\sin\theta = \pm 1$, suivant le cas.

Changement des directions des axes. — Nous allons étudier actuellement le problème du changement de coordonnées lorsque, l'origine restant la même, les directions des axes changent.

Il s'agit donc de passer d'un système $Oxyz$ à un second système $Ox'y'z'$ que nous supposerons essentiellement orienté de la même façon.

Le rayon vecteur d'un point M ne changeant pas, il suffit de déterminer les nouvelles coordonnées angulaires ψ', θ' de la direction OM en fonction des anciennes ψ et θ. Nous pouvons représenter les deux systèmes par les traces des axes sur la sphère céleste de centre O, ce qui conduit aux deux triangles trirectangles xyz, $x'y'z'$, dont il faut tout d'abord définir la position relative (*fig.* 10). Soit I l'un des points d'intersection des deux grands cercles xy, $x'y'$, choisi arbitrairement, et soit i l'angle que fait en I le grand cercle xy avec le grand cercle $x'y'$, compté positivement dans le sens de l'orientation des deux systèmes d'axes; soient de plus σ et σ' les arcs xI et x'I, comptés positivement dans le sens des arcs xy et $x'y'$ égaux à

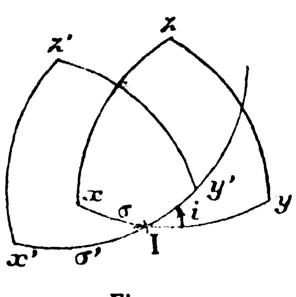


Fig. 10

$\frac{\pi}{2}$: les trois angles σ, σ', i définissent d'une façon précise la position du système $x'y'z'$ par rapport au système xyz. On observera que si l'on remplace le point I par celui qui lui est diamétralement opposé, i change de signe en même temps que σ et σ' augmentent de π. On voit encore que si l'on échange les rôles respectifs des deux systèmes d'axes, il suffit de changer le signe de i en conservant σ et σ'.

Soit alors un point quelconque M de la sphère, de coordonnées ψ et θ, ψ' et θ', dans les deux systèmes respectivement, et envisageons le triangle sphérique Mzz', dit *triangle de position* relatif à M et aux deux systèmes (*fig.* 11). Nous avons le droit de prendre les côtés zz', Mz, Mz' de ce triangle égaux respectivement à i, $\frac{\pi}{2} - \theta$, $\frac{\pi}{2} - \theta'$; alors l'angle en z compté de zz' vers zM dans le sens de l'orientation des deux systèmes a pour valeur évidente $\frac{\pi}{2} + \psi - \sigma$; l'angle en z', compté nécessairement dans le même sens de $z'M$ vers $z'z$, a pour valeur $\frac{\pi}{2} - \psi' + \sigma'$; enfin l'angle en M, dit souvent *angle parallactique* ou *angle à l'astre*, est compté dans le même sens de Mz vers Mz', et sera désigné par S. Suivant nos conventions sur la définition des triangles sphériques, quand i est négatif, il faut remplacer la direction zz', par exemple, par son prolongement.

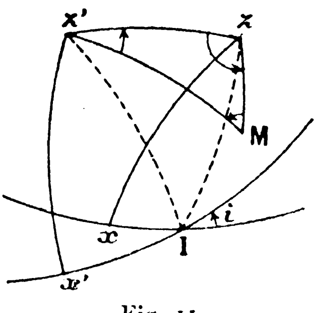


Fig. 11

On peut alors appliquer au triangle de position toutes les formules de la Trigonométrie sphérique, en faisant

$$a = \frac{\pi}{2} - \theta', \qquad A = \frac{\pi}{2} + \psi - \sigma,$$

$$b = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad B = \frac{\pi}{2} - \psi' + \sigma',$$

$$c = i, \qquad C = S ;$$

et comme d'après les conventions faites, θ et θ' sont en général

compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, a et b seront compris entre o et π, et il n'y aura plus aucune ambiguïté.

Pour résoudre le problème proposé, c'est-à-dire calculer ψ' et θ' connaissant ψ et θ, on voit qu'on est ramené à la résolution d'un triangle sphérique connaissant deux côtés et l'angle compris, b, c, A, et l'on peut appliquer tout ce que nous avons dit au sujet de cette question.

Si l'on ne veut pas autre chose que les inconnues ψ' et θ', on prendra le système de Gauss correspondant

$$(21)\quad \begin{cases} \cos\theta' \sin(\psi'-\sigma') = \sin i \sin\theta + \cos i \cos\theta \sin(\psi-\sigma), \\ \cos\theta' \cos(\psi'-\sigma') = \cos\theta \cos(\psi-\sigma), \\ \sin\theta' = \cos i \sin\theta - \sin i \cos\theta \sin(\psi-\sigma), \end{cases}$$

et l'on en tirera les inconnues à la façon ordinaire.

Pour simplifier le calcul, on pourra faire

$$\begin{cases} m \sin M = \cos\theta \sin(\psi-\sigma), \\ m \cos M = \sin\theta, \end{cases}$$

et par suite

$$(21^{bis})\quad \begin{cases} \cos\theta' \sin(\psi'-\sigma') = m \sin(i+M), \\ \cos\theta' \cos(\psi'-\sigma') = \cos\theta \cos(\psi-\sigma), \\ \sin\theta' = m \cos(i+M). \end{cases}$$

Si l'on a besoin en outre de l'angle à l'astre, on pourra le calculer par les relations

$$(22)\quad \begin{cases} \cos\theta' \sin S = \sin i \cos(\psi-\sigma), \\ \cos\theta' \cos S = \cos i \cos\theta + \sin i \sin\theta \sin(\psi-\sigma), \end{cases}$$

dont la seconde peut encore s'écrire

$$\cos\theta' \cos S = m_1 \sin(i+M_1),$$

en faisant

$$\begin{cases} m_1 \sin M_1 = \cos\theta, \\ m_1 \cos M_1 = \sin\theta \sin(\psi-\sigma). \end{cases}$$

Mais si l'on veut avoir simultanément ψ', θ' et S, il sera pré-

férable d'employer les formules de Delambre, qui deviennent ici

$$(23)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi'-\sigma'}{2}+\frac{S}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\frac{i}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi'-\sigma'}{2}+\frac{S}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{i}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi'-\sigma'}{2}-\frac{S}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\sigma}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\frac{i}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi'-\sigma'}{2}-\frac{S}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi-\sigma}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{i}{2}\right). \end{cases}$$

Quand on veut résoudre le problème inverse, qui consiste à calculer ψ, θ connaissant ψ' et θ', on pourra appliquer les mêmes formules, en échangeant simplement les lettres accentuées et celles non accentuées, et remplaçant i et S par $-i$ et $-$ S.

Lorsque l'angle i est petit, on pourra appliquer avec avantage la méthode développée au Chapitre II, ce qui conduira aux formules

$$(24)\quad \begin{cases} \sin\omega = \sin i \cos(\psi-\sigma), \\ \operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg} i \sin(\psi-\sigma), \\ \operatorname{tg}\rho = \sin\omega \operatorname{tg}(\theta+\varphi), \\ \operatorname{tg}\frac{\Delta(\psi-\sigma)-\rho}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{\Delta\theta-\varphi}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

en faisant $(\psi'-\sigma')-(\psi-\sigma)=\Delta(\psi-\sigma)$, $\theta'-\theta=\Delta\theta$; pour ôter toute ambiguïté, on prendra $\cos\omega$, $\cos\varphi$, $\cos\rho$ positifs (d'une façon précise, le produit $\cos\omega\cos\varphi$ a le signe de $\cos i$).

Si l'on trouvait ainsi une valeur de θ' dont le cosinus fût négatif, on la remplacerait par $\pi-\theta'$, en même temps qu'on augmenterait ψ' de π : c'est ce qui résulte de l'ambiguïté inévitable de la détermination des coordonnées polaires.

Si l'angle i est suffisamment petit pour qu'on en puisse négliger le carré, on se contentera des formules différentielles

$$(25)\quad \begin{cases} d(\psi-\sigma) = i \operatorname{tg}\theta\cos(\psi-\sigma), \\ d\theta = -i\sin(\psi-\sigma), \end{cases}$$

qui résultent immédiatement des précédentes : ceci suppose toutefois que $\cos\theta$ n'est pas très petit.

Avec une erreur relative au plus de l'ordre de i^2, on écrira dans tous les cas :

$$(26)\quad \begin{cases} \omega = i\cos(\psi - \sigma), \qquad \varphi = -i\sin(\psi - \sigma), \\ \operatorname{tg}\rho = \omega\operatorname{tg}(\theta + \varphi), \\ \Delta(\psi - \sigma) = \rho - \frac{1}{2}\omega\varphi, \qquad \Delta\theta = \varphi - \omega\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}; \end{cases}$$

et si l'angle $\theta + \varphi$ n'est pas voisin de $\pm\frac{\pi}{2}$, on pourra prendre dans ces formules ρ et $\frac{\rho}{2}$ à la place de $\operatorname{tg}\rho$ et $\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}$.

Lorsque l'angle i est voisin de π, on peut développer une solution en tout semblable à la précédente, en observant que l'on peut changer à la fois les signes de ψ', θ', σ', et augmenter i de π.

Les relations différentielles correspondant au problème général qui nous occupe sont faciles à former ; supposant que les données ψ, θ, σ, σ', i reçoivent des corrections $d\psi$, $d\theta$, ..., les variations correspondantes de ψ' et θ' seront définies par les formules

$$(27)\quad \begin{cases} \cos\theta' . d(\psi' - \sigma') = \cos S\cos\theta . d(\psi - \sigma) + \sin S . d\theta \\ \qquad\qquad + \sin\theta'\cos(\psi' - \sigma')di, \\ d\theta' = -\sin S\cos\theta . d(\psi - \sigma) + \cos S . d\theta - \sin(\psi' - \sigma')di, \end{cases}$$

que l'on obtient en calculant, dans un triangle sphérique, dB et da en fonction de dA, db, dc, et remplaçant les éléments par leurs valeurs actuelles.

Pour avoir les formules correspondant au problème inverse, on fera la substitution déjà indiquée : échanger $\psi - \sigma$ et θ avec $\psi' - \sigma'$ et θ', changer les signes de i et S.

Dans le cas particulier de $i = 0$, on a $\psi' - \sigma' = \psi - \sigma$, $\theta' = \theta$; si donc maintenant on donne à l'angle i une très petite valeur, on peut trouver $\psi' - \sigma'$ et θ' par les formules (27), qui se réduisent immédiatement en effet aux formules (25), lorsqu'on y fait $d(\psi - \sigma) = d\theta = 0$, et que l'on remplace di par i, θ' et $\psi' - \sigma'$ par θ et $\psi - \sigma$.

Si $\cos\theta'$ est très petit, les formules (27) ne sont plus utili-

sables directement ; mais appliquons encore une fois la méthode de Fabritius, en recourant aux coordonnées rectilignes. Appelant P et Q les seconds membres des relations (27), et posant

$$x = \cos\theta' \cos(\psi' - \sigma'), \qquad y = \cos\theta' \sin(\psi' - \sigma'), \qquad z = \sin\theta',$$

on a toujours, avec une erreur relative du premier ordre par rapport aux corrections données,

$$\begin{aligned} dx &= -\,P \sin(\psi' - \sigma') - Q \sin\theta' \cos(\psi' - \sigma'), \\ dy &= P \cos(\psi' - \sigma') - Q \sin\theta' \sin(\psi' - \sigma'), \\ dz &= Q \cos\theta' ; \end{aligned}$$

et l'on peut faire dans les mêmes conditions, en réservant la caractéristique Δ aux accroissements véritables,

$$\Delta x = dx, \qquad \Delta y = dy, \qquad \Delta z = dz.$$

Par suite, soit en raisonnant comme au Chapitre premier, soit en appliquant, avec les changements de notations convenables, les formules (20) du paragraphe précédent, on a, en ne commettant toujours qu'une erreur relative de l'ordre des corrections données,

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta \psi' - \sigma') &= \frac{P}{\cos\theta' - Q \sin\theta'} = P \operatorname{séc}(\theta' + Q), \\ \Delta\theta' &= Q - P \sin\theta' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta(\psi' - \sigma'). \end{aligned} \right.$$

Changement de coordonnées pour un plan. — Pour définir un plan P passant par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire encore une direction de plan, nous envisagerons le grand cercle C, trace du plan sur la sphère céleste de centre O (*fig.* 12). Nous dirons que le plan P est *orienté* si le grand cercle C est lui-même orienté, c'est-à-dire si l'on choisit sur lui un sens de parcours considéré comme sens positif. Le grand cercle C et le grand cercle xy se coupent en deux points N et N', qui sont les *nœuds* du cercle C dans le système de coordonnées employées : N est le *nœud ascendant*, si un mobile parcourant C dans le sens positif, et traversant N, entre dans l'hémisphère qui contient le pôle z du grand cercle xy, en quittant celui qui

ne le contient pas; N′ diamétralement opposé à N, est alors le *nœud descendant*.

Pour fixer la position du plan P, on se donne en général la coordonnée ψ de son nœud ascendant, c'est-à-dire l'arc ♈N, que nous désignerons par ϑ; puis l'*inclinaison*, c'est-à-dire l'angle j que fait en N le grand cercle xy avec le grand cercle C, cet angle étant compté dans le sens de l'orientation du système, et ses côtés étant pris dans leurs sens positifs.

Il est clair que si l'on veut remplacer N par N′, il n'y aura qu'à augmenter ϑ de π, et changer le signe de j.

Dans la plupart des cas, il y a lieu de considérer, en même temps que le plan P, une direction déterminée dans ce plan, définie par un point A fixe du grand cercle C. Pour déterminer ce point A, il suffit de se donner l'arc NA, compté sur C dans le sens positif, que nous désignerons par ω : souvent aussi on se donne, au lieu de ω, la somme des arcs xN et NA, soit $\vartheta + \omega$, désignée par ϖ. Si l'on remplace N par N′, ω augmente de π, et ϖ ne change pas, à la condition bien entendu de toujours considérer comme égaux des angles qui ne diffèrent que d'un multiple de 2π. Quand on change le sens de l'orientation du plan P, on voit que les deux nœuds s'échangent, et que, en se bornant aux nœuds ascendants, il faut changer ϑ en $\pi + \vartheta$, j en $\pi - j$, ω en $\pi - \omega$, ϖ en $\vartheta - \omega$, c'est-à-dire en $2\vartheta - \varpi$.

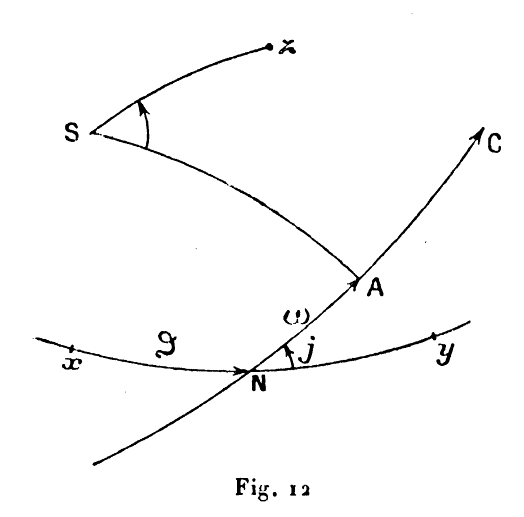


Fig. 12

Enfin, une dernière observation préviendra toute ambiguïté par la suite : l'inclinaison j, définie par le nœud ascendant, est toujours comprise entre o et π, et par suite l'inclinaison relative au nœud descendant est toujours comprise entre o et $-\pi$.

Il est souvent utile d'adjoindre au plan P son pôle S, choisi de telle façon que pour un observateur situé sur OS, les pieds

en O, la tête en S, le sens positif sur le cercle C soit le sens même de l'orientation du système de coordonnées : les coordonnées angulaires ψ et θ du point S sont alors évidemment $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - j$, cette dernière étant comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, conformément à nos conventions générales, si j est l'inclinaison définie par le nœud ascendant. De plus, il est évident que l'angle ASz, compté dans le sens de l'orientation des coordonnées depuis SA jusqu'à Sz, a pour valeur $\frac{\pi}{2} - \omega$.

Faisons maintenant le même changement de coordonnées que dans le paragraphe précédent ; les éléments qui définissent le plan P et la direction OA dans le nouveau système seront ϑ', j', ω' ou ϖ' ; et comme le pôle S du plan P n'a pas changé, on voit que pour déterminer ces nouveaux éléments, on sera ramené au problème traité ci-dessus : remarquant en outre que l'angle désigné alors par S, soit zSz', devient ici $ASz' - ASz$, ou $\omega - \omega'$, toutes les formules du paragraphe précédent pourront s'appliquer au problème actuel, en y remplaçant

$$\psi \text{ par } \vartheta - \frac{\pi}{2}, \qquad \theta \text{ par } \frac{\pi}{2} - j,$$

$$\psi' \text{ par } \vartheta' - \frac{\pi}{2}, \qquad \theta' \text{ par } \frac{\pi}{2} - j', \qquad S \text{ par } \omega - \omega'.$$

Ne transcrivant que les principales relations, on aura donc :

$$(29) \begin{cases} \sin j' \sin(\vartheta' - \sigma') = \sin j \sin(\vartheta - \sigma), \\ \sin j' \cos(\vartheta' - \sigma') = -\sin i \cos j + \cos i \sin j \cos(\vartheta - \sigma), \\ \qquad\qquad \cos j' = \cos i \cos j + \sin i \sin j \cos(\vartheta - \sigma), \\ \sin j' \sin(\omega - \omega') = \sin i \sin(\vartheta - \sigma), \\ \sin j' \cos(\omega - \omega') = \cos i \sin j - \sin i \cos j \cos(\vartheta - \sigma) ; \end{cases}$$

$$(30) \begin{cases} \sin\frac{j'}{2} \sin\left(\frac{\vartheta' - \sigma'}{2} + \frac{\omega - \omega'}{2}\right) = \sin\frac{\vartheta - \sigma}{2} \sin\frac{j + i}{2}, \\ \sin\frac{j'}{2} \cos\left(\frac{\vartheta' - \sigma'}{2} + \frac{\omega - \omega'}{2}\right) = \cos\frac{\vartheta - \sigma}{2} \sin\frac{j - i}{2}, \\ \cos\frac{j'}{2} \sin\left(\frac{\vartheta' - \sigma'}{2} - \frac{\omega - \omega'}{2}\right) = \sin\frac{\vartheta - \sigma}{2} \cos\frac{j + i}{2}, \\ \cos\frac{j'}{2} \cos\left(\frac{\vartheta' - \sigma'}{2} - \frac{\omega - \omega'}{2}\right) = \cos\frac{\vartheta - \sigma}{2} \cos\frac{j - i}{2}. \end{cases}$$

Si N′ désigne ici le nœud du plan P par rapport au nouveau système d'axes, le triangle INN′ conduirait immédiatement à

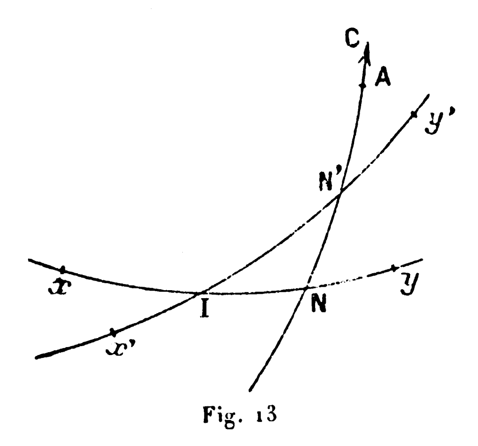


Fig. 13

ces mêmes formules ; les éléments de ce triangle sont en effet (*fig.* 13)

$$\text{IN} = \vartheta - \sigma, \qquad \text{IN}' = \vartheta' - \sigma', \qquad \text{NN}' = \omega - \omega',$$
$$\widehat{\text{N}'} = j', \qquad \widehat{\text{N}} = \pi - j, \qquad \widehat{\text{I}} = i,$$

et l'on est ramené au quatrième cas de résolution des triangles.

Distance et angle de position. Points voisins sur la sphère. — Considérons deux points S, S′ de la sphère céleste de centre O, rapportés au même système de coordonnées (*fig.* 14).

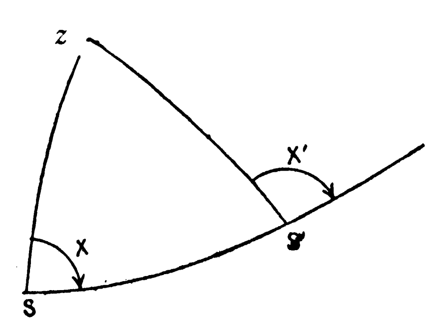


Fig 14

Lorsque ces points sont voisins, et c'est ici une hypothèse essentielle, il est souvent avantageux de définir leur position relative sans passer par l'intermédiaire de leurs coordonnées. Pour déterminer la position de S′ par rapport à S, on se donne alors : 1° la *distance* SS′ toujours positive et inférieure à π, soit s ; 2° l'angle zSS′, compté depuis Sz jusqu'à SS′ dans le sens contraire à celui de l'orientation du système : c'est *l'angle de position* χ de S′ par rapport à S.

Pour l'étude des relations qui existent entre s et χ, d'une part, et les coordonnées ψ, θ, ψ', θ' des deux points S et S′,

d'autre part, il suffit d'envisager le triangle zSS', qui admet pour éléments

$$\left\{\begin{array}{ccc} s, & \frac{\pi}{2}-\theta, & \frac{\pi}{2}-\theta', \\ \psi'-\psi, & \pi-\chi', & \chi, \end{array}\right.$$

en appelant χ' l'angle de S'z avec le prolongement de SS', compté dans le même sens que χ, de sorte que $\pi+\chi'$ est l'angle de position de S par rapport à S'.

Supposons d'abord connus les éléments s, χ, θ, et désignons par $\Delta\psi$, $\Delta\theta$, $\Delta\chi$ les différences $\psi'-\psi$, $\theta'-\theta$, $\chi'-\chi$; les diverses formules qui terminent le Chapitre II donnent la solution générale du problème, dans tous les cas possibles, en y remplaçant b, c, A par $\frac{\pi}{2}-\theta$, s, χ, et ε, $b-a$, C par $\Delta\chi$, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$; si donc on néglige le cube de la distance s supposée petite, on aura

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta\,\Delta\psi &= s\sin\chi+s^2\sin\chi\cos\chi\,\mathrm{tg}\,\theta, \\ \Delta\theta &= s\cos\chi-\frac{1}{2}s^2\sin^2\chi\,\mathrm{tg}\,\theta, \\ \Delta\chi &= s\sin\chi\,\mathrm{tg}\,\theta+\frac{1}{2}s^2\sin\chi\cos\chi(1+2\,\mathrm{tg}^2\theta); \end{aligned}\right.$$

et si l'on peut négliger s^2, il viendra plus simplement encore

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\psi &= s\sin\chi\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\theta, \\ \Delta\theta &= s\cos\chi, \\ \Delta\chi &= s\sin\chi\,\mathrm{tg}\,\theta. \end{aligned}\right.$$

Toutefois, l'usage de ces formules suppose expressément que les points S et S' ne sont pas dans le voisinage du pôle z ou bien du point diamétralement opposé; si cette circonstance se présentait, il faudrait avoir recours à des formules plus exactes qu'il est inutile de transcrire ici, puisqu'il suffit pour les obtenir de faire la substitution indiquée ci-dessus dans les équations (a) ou (d) du Chapitre II.

Résolvons maintenant le problème inverse, c'est-à-dire proposons-nous de calculer s et χ en supposant connues les coordonnées ψ, θ, ψ', θ' des deux points S et S'; on a, dans le

triangle zSS' :

$$\left\{\begin{aligned} \sin s \sin \chi &= \cos \theta' \sin (\psi' - \psi), \\ \sin s \cos \chi &= \cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \cos (\psi' - \psi), \\ \cos s &= \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \cos (\psi' - \psi), \end{aligned}\right.$$

ou plutôt

$$(33) \quad \left\{\begin{aligned} &\sin s \sin \chi = \cos \theta' \sin \Delta\psi, \\ &\sin s \cos \chi = \sin \Delta\theta + 2 \sin \theta \cos \theta' \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}, \\ &\sin^2 \frac{s}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \cos \theta \cos \theta' \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}. \end{aligned}\right.$$

On peut prendre aussi, en faisant $\theta_1 = \frac{\theta' + \theta}{2}$, $\chi_1 = \frac{\chi' + \chi}{2}$,

$$(34) \quad \left\{\begin{aligned} \sin \frac{s}{2} \sin \chi_1 &= \cos \theta_1 \sin \frac{\Delta\psi}{2}, \\ \sin \frac{s}{2} \cos \chi_1 &= \sin \frac{\Delta\theta}{2} \cos \frac{\Delta\psi}{2}, \\ \cos \frac{s}{2} \sin \frac{\Delta\chi}{2} &= \sin \theta_1 \sin \frac{\Delta\psi}{2}, \\ \cos \frac{s}{2} \cos \frac{\Delta\chi}{2} &= \cos \frac{\Delta\theta}{2} \cos \frac{\Delta\psi}{2}; \end{aligned}\right.$$

et ces formules, comme les précédentes, sont rigoureuses, applicables dans tous les cas.

Si les points S et S' sont voisins, la différence $\Delta\theta$ est nécessairement petite, et il en est de même de la différence $\Delta\psi$, à moins que les points S et S' ne soient eux-mêmes dans le voisinage du pôle z ou du pôle opposé. Si nous écartons ce cas, on aura, en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à s, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$:

$$(35) \quad \left\{\begin{aligned} &s \sin \chi = \cos \theta \,.\, \Delta\psi - \sin \theta \,.\, \Delta\theta \,.\, \Delta\psi, \\ &s \cos \chi = \Delta\theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (\Delta\psi)^2. \\ &s^2 = (\Delta\theta)^2 + \cos^2 \theta (\Delta\psi)^2 - \sin \theta \cos \theta \,.\, \Delta\theta \,.\, (\Delta\psi)^2; \end{aligned}\right.$$

et plus simplement, si l'on néglige encore les termes du second ordre,

$$(36) \quad \left\{\begin{aligned} s \sin \chi &= \cos \theta \,.\, \Delta\psi, \\ s \cos \chi &= \Delta\theta, \\ s^2 &= (\Delta\theta)^2 + \cos^2 \theta (\Delta\psi)^2; \end{aligned}\right.$$

cette dernière relation nous fournit l'expression bien connue de l'élément linéaire de la sphère.

Si S et S′ sont dans le voisinage d'un pôle, la différence $\Delta\psi$ peut être grande, et au même degré d'approximation, il faudra écrire

$$\left\{\begin{aligned} s \sin \chi &= \cos \theta' \sin \Delta\psi, \\ s \cos \chi &= \Delta\theta + 2 \sin \theta \cos \theta' \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}, \\ s^2 &= (\Delta\theta)^2 + 4 \cos \theta \cos \theta' \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}, \end{aligned}\right.$$

le facteur $\cos \theta'$ pouvant d'ailleurs être remplacé par $\cos \theta - \sin \theta \, . \, \Delta\theta$.

On voit que, même dans ce cas, les formules (36) donnent encore de bons résultats, si $\Delta\psi$, sans être du même ordre que s, reste d'une grandeur médiocre ; ceci nous apprend, et cette observation est fondamentale en Astronomie, qu'il ne faut pas juger du degré de rapprochement de deux points sur la sphère uniquement par le degré de petitesse des différences de leurs coordonnées, $\Delta\psi$ et $\Delta\theta$, mais plus exactement par le degré de petitesse des quantités $\cos \theta \, . \, \Delta\psi$ et $\Delta\theta$.

Les formules (36) sont susceptibles d'une interprétation géométrique importante. Envisageons le plan tangent à la sphère céleste en S (*fig.* 15), et dans ce plan deux axes rectangulaires $S\xi$ et $S\eta$, le second tangent au grand cercle Sz mené dans le sens Sz, le premier tangent au parallèle SP du point S, et de façon que l'angle $S\xi$ avec $S\eta$ compté dans le sens de l'orientation du système des coordonnées soit égal à $\frac{\pi}{2}$. Le point S′ de la sphère peut être confondu, puisqu'on néglige le carré de s, avec sa projection sur le plan tangent en S faite du centre O comme point de vue ; alors s et $\frac{\pi}{2} - \chi$ sont évidemment les coordonnées polaires ordinaires du point S′ dans le système $S\xi\eta$, et si les coordonnées rectilignes de ce point sont

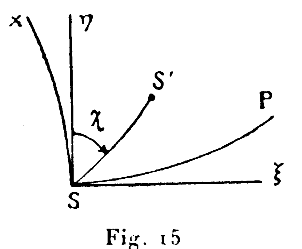


Fig. 15

ξ et η, on a

$$(37) \quad \begin{cases} \xi = s \sin \chi = \cos \theta . \Delta\psi, \\ \eta = s \cos \chi = \Delta\theta. \end{cases}$$

On obtiendrait immédiatement ces mêmes relations en prenant le point d'intersection S_1 de l'arc zS' avec le parallèle du point S, et en assimilant le triangle $SS'S_1$ formé par deux arcs de grand cercle et un arc de parallèle, à un triangle rectiligne dont les côtés sont $SS' = s$, $S'S_1 = \Delta\theta$, $SS_1 = \cos \theta . \Delta\psi$ (puisque le rayon du parallèle SS_1 est $\cos \theta$), et dans lequel l'angle en S vaut $\frac{\pi}{2} - \chi$ (*fig.* 16).

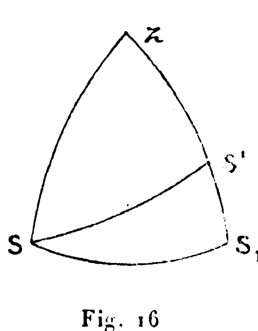


Fig. 16

Déplacement d'un point sur la sphère. — Supposons maintenant qu'un point S de la sphère subisse pour une raison quelconque un petit déplacement qui l'amène en S', en changeant ses coordonnées en $\psi + d\psi$ et $\theta + d\theta$, $d\psi$ et $d\theta$ étant en général des quantités petites du premier ordre dont on peut négliger les carrés et les produits. Pour déterminer la position du point S' par rapport à S, on aura comme ci-dessus

$$(38) \quad \begin{cases} \xi = s \sin \chi = \cos \theta . d\psi, \\ \eta = s \cos \chi = d\theta. \end{cases}$$

Ceci n'est valable que si S n'est pas dans le voisinage du pôle z ou du pôle opposé : toutefois, il est facile de voir que ces formules, convenablement comprises, sont toujours d'une application légitime.

La cause qui déplace le point S pour l'amener en S' peut, dans la plupart des cas que nous rencontrerons, être définie directement non pas par les variations qu'elle fait subir aux coordonnées angulaires ψ, θ, mais bien plutôt, par les variations *toujours petites*, dx, dy, dz qu'elle fait subir aux coordonnées rectilignes

$$x = \cos \theta \cos \psi, \qquad y = \cos \theta \sin \psi, \qquad z = \sin \theta.$$

Les variations $d\psi$ et $d\theta$ sont alors des fonctions de dx, dy, dz.

que l'on trouve par simple application des formules (18) relatives au changement d'origine (en faisant $r = 1$), puisqu'en désignant par x', y', z' les coordonnées rectangulaires de S', on a

$$x' = x + dx, \qquad y' = y + dy, \qquad z' = z + dz.$$

D'ailleurs, les formules que l'on trouve ainsi ne sont légitimes que si $\cos\theta$ n'est pas très petit.

Désignons cependant, comme précédemment, par P et Q les expressions toujours finies, que l'on trouve ainsi pour $\cos\theta . d\psi$ et $d\theta$, de sorte que l'on a *toujours*

$$\left\{\begin{aligned} dx &= -\mathrm{P}\sin\psi - \mathrm{Q}\sin\theta\cos\psi, \\ dy &= \mathrm{P}\cos\psi - \mathrm{Q}\sin\theta\sin\psi, \\ dz &= \mathrm{Q}\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

Revenons maintenant aux deux premières formules (33), qui peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \sin s \sin\chi &= -x'\sin\psi + y'\cos\psi, \\ \sin s \cos\chi &= z'\cos\theta - \sin\theta\,(x'\cos\psi + y'\sin\psi)\,; \end{aligned}\right.$$

remplaçant x', y', z' par leurs valeurs $x + dx, \ldots$ et confondant $\sin s$ avec s, elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= s\sin\chi = \mathrm{P}, \\ \eta &= s\cos\chi = \mathrm{Q}. \end{aligned}\right.$$

et sont toujours valables.

On voit donc bien que, sous le bénéfice des hypothèses faites sur la cause qui produit le déplacement de S, les formules (38) sont toujours légitimes, une fois que $\cos\theta . d\psi$ et $d\theta$ sont remplacés par leurs expressions en fonction des coordonnées ψ, θ elles-mêmes. On pouvait à la vérité le prévoir, puisqu'une fois mises sous cette forme, toute difficulté disparaît ; il n'est pas inutile cependant de l'avoir démontré directement, afin de bien comprendre comment les choses se passent en réalité, et comment, suivant le principe de la méthode de Fabritius, la considération des coordonnées rectilignes fait disparaître les difficultés inhérentes à l'emploi des coordonnées angulaires.

Déplacement simultané de deux points voisins. — Pour

terminer ce Chapitre, nous allons étudier le problème suivant : soient deux points S et S′, voisins, et supposons qu'une même cause les déplace en S_1 et S_1'; il faut déterminer la position relative de ces deux nouveaux points, connaissant la position relative des deux premiers.

Nous supposerons ici que l'on est assez loin du pôle z, ou du pôle opposé, pour qu'on puisse employer avec sécurité toutes les formules différentielles : si cette circonstance n'avait pas lieu, on recourrait à des formules rigoureuses, les relations que nous allons établir ne pouvant plus être acceptées qu'à titre d'indication, à moins qu'exceptionnellement elles ne gardent leur valeur, ne présentant plus aucune difficulté.

Nous désignerons par ψ, θ les coordonnées angulaires de S, par $\psi + \Delta\psi$, $\theta + \Delta\theta$ celles de S′, par s la distance SS′ et par χ l'angle de position de S′ par rapport à S, de sorte que, en conservant aussi les coordonnées rectangulaires ξ, η :

$$(37)\qquad \begin{cases} \xi = s\sin\chi = \cos\theta\,.\,\Delta\psi, \\ \eta = s\cos\chi = \Delta\theta. \end{cases}$$

Nous appellerons encore $d\psi$ et $d\theta$ les corrections qu'il faut apporter aux coordonnées de S pour l'amener en S_1, en vertu de la cause qui le déplace. Ces quantités sont certaines fonctions de ψ et θ, et en appelant de même $d\psi'$, $d\theta'$ les corrections qu'il faut apporter à S′ pour l'amener en S_1', on a évidemment

$$(39)\qquad \begin{cases} d\psi' - d\psi = \dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\psi}\Delta\psi + \dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\theta}\Delta\theta, \\[2ex] d\theta' - d\theta = \dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\psi}\Delta\psi + \dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\theta}\Delta\theta, \end{cases}$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur.

Ces quantités, de l'ordre du produit de $\Delta\psi$ ou $\Delta\theta$ par $d\psi$ ou $d\theta$, ne sont autres que les accroissements $d(\Delta\psi)$, $d(\Delta\theta)$ que prennent les différences de coordonnées $\Delta\psi$, $\Delta\theta$ quand, en vertu de la cause agissante, on passe de S, S′ à S_1, S_1'.

Les éléments s et χ, ou ξ et η, subissent eux-mêmes des accroissements correspondants qui sont (à la condition de remplacer la considération de $d\chi$ par celle de $s\,d\chi$) de l'ordre du produit de s par $d\psi$ ou $d\theta$; pour les déterminer, il suffit de

différentier les équations (37) par rapport à la caractéristique d; on a ainsi

$$\begin{cases} d\xi = \sin\chi\, ds + s\cos\chi\, d\chi = \cos\theta d(\Delta\psi) - \sin\theta\, d\theta\, \Delta\psi, \\ d\eta = \cos\chi\, ds - s\sin\chi\, d\chi = d(\Delta\theta), \end{cases}$$

et par suite

$$(40)\quad \begin{cases} d\xi = \xi\left(-\operatorname{tg}\theta\,.\,d\theta + \dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\psi}\right) + \eta\cos\theta\,\dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\theta}, \\ d\eta = \xi\,\text{séc}\,\theta\,\dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\psi} + \eta\,\dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\theta}; \end{cases}$$

ou bien

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{s} = \sin^2\chi\left(-\operatorname{tg}\theta\,.\,d\theta + \dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\psi}\right) \\ \qquad + \sin\chi\cos\chi\left(\cos\theta\,\dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\theta} + \text{séc}\,\theta\,\dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\psi}\right) + \cos^2\chi\,\dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\theta}, \\ d\chi = \sin\chi\cos\chi\left(-\operatorname{tg}\theta\,.\,d\theta + \dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\psi} - \dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\theta}\right) \\ \qquad + \cos^2\chi\cos\theta\,\dfrac{\partial(d\psi)}{\partial\theta} - \sin^2\chi\,\text{séc}\,\theta\,\dfrac{\partial(d\theta)}{\partial\psi}. \end{cases}$$

Les formules (39), (40) et (41) résolvent complètement la question proposée, et sont appropriées aux divers choix de coordonnées que l'on peut faire pour étudier la position relative de deux points voisins. Elles n'exigent que le calcul préalable des dérivées partielles des fonctions $d\psi$, $d\theta$ par rapport aux variables indépendantes ψ et θ.

LIVRE II

LA TERRE — COORDONNÉES ASTRONOMIQUES RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

CHAPITRE IV

LA TERRE

Pour pouvoir tirer parti d'une observation faite en un lieu quelconque à la surface de la Terre, il faut évidemment avant tout connaître les éléments qui fixent la position de ce lieu. Nous devons donc tout d'abord étudier la Terre.

La Terre. Axe du Monde. Pôles. Equateur. — La Terre peut être assimilée, pour les usages astronomiques, à un corps solide de forme sensiblement sphérique. Le mouvement de ce corps est déterminé par celui de son centre de gravité O, et par sa rotation autour d'un axe instantané OI, passant par O, et dit *axe du monde*.

L'axe du monde n'est pas absolument fixe par rapport à la Terre, mais il est très près de l'être : sa direction ne s'écarte de la position moyenne que d'une quantité qui paraît inférieure à $0'',5$. En d'autres termes, sur la surface de la Terre, l'extrémité de l'axe OI, ou pôle, se déplace dans un cercle dont le rayon est inférieur à 15 mètres.

Nous supposerons toujours l'axe du monde OI dirigé de telle façon que la rotation de la Terre autour de OI, qui est presque rigoureusement uniforme, se fasse dans le sens direct, c'est-à-dire de la droite vers la gauche.

La demi-droite OI perce la surface terrestre au *pôle boréal* ou *pôle Nord*; la demi-droite opposée la perce au *pôle austral* ou *pôle Sud*. L'*équateur* proprement dit est le plan mené par O, perpendiculaire à OI : il partage la Terre en deux parties sensiblement hémisphériques, qui prennent chacune le nom du pôle qu'elle renferme.

Si l'on considère la sphère céleste de centre quelconque M, et que par M on mène une parallèle à OI, le point P où cette demi-droite perce la sphère en est le pôle boréal ou pôle Nord, ou encore simplement le pôle ; le point diamétralement opposé P′, en est le pôle austral ou pôle Sud ; P′P est la ligne des pôles (*fig.* 17). Sur cette sphère, l'équateur est le grand cercle AA′ dont le plan est parallèle à l'équateur proprement dit: il admet pour pôles sphériques les deux pôles boréal et austral, et partage la sphère en deux hémisphères, l'un boréal, l'autre austral.

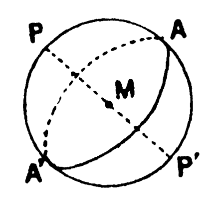


Fig. 17

Verticale. Gravité. — En un point M de la Terre, il existe une direction parfaitement définie à chaque instant : c'est celle du fil à plomb, c'est-à-dire de la *pesanteur* ou *gravité*. C'est la *verticale vraie* ou *astronomique*, ou simplement la *verticale* : nous la supposerons toujours dirigée vers le haut, de sorte que la verticale descendante est la direction du mouvement relatif que prendrait un point matériel en repos relatif par rapport à la Terre, si on l'abandonnait à lui-même.

La verticale du point M rencontre la sphère céleste de centre M en un point Z qui est le *zénith* ; le point diamétralement opposé Z′ est le *nadir* ; le plan mené par M perpendiculairement à la verticale est l'*horizon* de M, coupant la sphère suivant le grand cercle HH′ (*fig.* 18).

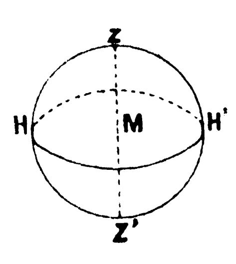


Fig. 18

Sur une sphère céleste de centre quelconque, on peut aussi bien représenter le zénith, le nadir et l'horizon relatifs au point M de la surface terrestre.

La verticale descendante en M est la direction de la résul-

tante des deux forces qui sollicitent un point matériel en équilibre relatif en M, savoir : 1° l'attraction newtonienne des masses qui constituent le système du monde ; 2° la force centrifuge due au mouvement absolu de la Terre elle-même. C'est cette force résultante qui est la pesanteur, ou gravité.

L'intensité de la pesanteur est déterminée par les observations du pendule.

La verticale ne saurait être, d'après cette définition même, rigoureusement fixe par rapport à la Terre ; mais ses variations, comme celles de l'intensité de la pesanteur, peuvent être regardées comme pratiquement insensibles, surtout pour les usages astronomiques.

Au champ de forces déterminé par la pesanteur, correspondent des *surfaces de niveau* constamment normales à la force, et des *lignes de force* constamment tangentes à la force. Ces surfaces et ces lignes ne sont pas rigoureusement fixes, mais subissent des perturbations très faibles, négligeables pour nous, dues au mouvement de la matière terrestre, et à l'action des astres extérieurs.

Les surfaces de niveau sont sensiblement sphériques.

Méridien. Points cardinaux. — Le méridien du lieu M est le plan qui contient la verticale et la ligne des pôles relative à ce lieu. Le plus souvent, il est convenable d'orienter ce plan, en réservant le nom de méridien à l'un des demi-plans limités soit par la ligne des pôles, soit par la verticale. Le méridien limité par la ligne des pôles contient toujours le zénith, mais non le nadir ; le méridien limité par la verticale contient toujours le pôle austral, mais non le pôle boréal.

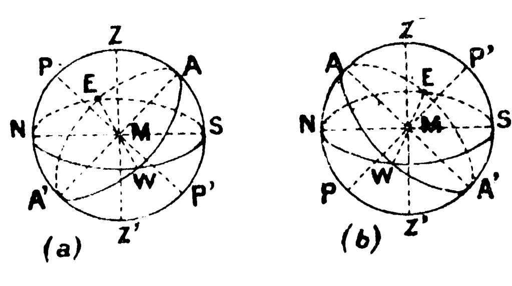


Fig. 19

L'horizon et l'équateur du point M se coupent suivant une ligne perpendiculaire au méridien, EW ; l'horizon et le méridien se coupent suivant une ligne NS perpendiculaire à EW (*fig.* 19). On choisit N, ou point *Nord*, de

façon que l angle des directions MP et MN soit toujours aigu ; S est alors le point *Sud*, et est toujours dans le méridien limité par la verticale ; les points E ou *Est* et W ou *Ouest*, sont disposés de façon que les quatre *points cardinaux* NESW se suivent dans le sens rétrograde pour un observateur placé suivant MZ, les pieds en M.

L'équateur et le méridien se coupent suivant une ligne AA' perpendiculaire à EW ; nous placerons le point A de façon que l'angle des directions MZ et MA soit toujours aigu ; ce point A est alors évidemment le *point le plus haut* de l'équateur, et toujours situé dans le méridien limité par la ligne des pôles. Les deux figures (*a*) et (*b*) correspondent aux deux cas qui peuvent se présenter, suivant que l'angle de MP avec MZ est aigu ou obtus.

Latitude. Longitude. Altitude. — Pour définir un lieu à la surface de la Terre, il faut évidemment se donner trois éléments ; on choisit la *latitude*, la *longitude* et l'*altitude*, que nous allons maintenant définir.

La latitude du point M est l'angle ZMA de la verticale avec le plan de l'équateur, compté positivement à partir de MZ vers le sud, dans le méridien, et par suite susceptible de varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. La latitude est donc positive ou négative suivant que l'on se trouve dans le cas de la figure (*a*) ou dans celui de la figure (*b*), c'est-à-dire encore suivant que l'angle de MP avec MZ est aigu ou obtus ; ou, ce qui revient au même, suivant que la verticale et la direction de l'axe du monde sont, ou non, du même côté de l'horizon. Prise en valeur absolue, la latitude est qualifiée de boréale ou Nord dans le premier cas, d'australe ou Sud dans le second cas.

L'angle de la verticale avec l'équateur est manifestement le même que celui de la ligne des pôles avec l'horizon ; la latitude est donc encore l'angle NMP, ou *hauteur* du pôle boréal au dessus de l'horizon, compté positivement à partir de MN vers le zénith : elle est positive ou négative suivant que le pôle est au-dessus ou au-dessous de l'horizon.

L'angle de la verticale avec la ligne des pôles, ZMP, compté

positivement vers le Nord, de o à π, est le complément de la la latitude, ou *colatitude*. Nous emploierons toujours la latitude, que nous désignerons par φ.

La latitude d'un lieu ne peut être constante, puisque la verticale et l'axe du monde n'ont pas des directions absolument fixes ; mais, pour notre but, nous pouvons la considérer comme constante. L'étude théorique de la *variation des latitudes* n'est pas dans notre programme : c'est une question de mécanique céleste et de géodésie.

La longitude de M est l'angle L que fait le méridien de M, limité à la ligne des pôles, avec le méridien, limité de la même façon, d'un lieu choisi arbitrairement, mais fixe F ; on s'accorde universellement à choisir pour ce lieu l'Observatoire de Greenwich. Cet angle est compté à partir du méridien de F dans le sens rétrograde, de o à 2π, ou, ce qui revient au même, de o à π vers l'Ouest, de o à $-\pi$ vers l'Est ; prise en valeur absolue, la longitude est encore dite occidentale ou orientale, suivant le cas.

Pour définir enfin l'altitude, imaginons une surface de niveau particulière, S_0, choisie comme fondamentale, ou de référence, et menons la ligne de force qui passe par le point M jusqu'à sa rencontre en M' avec S_0 : la longueur M'M, comptée positivement ou négativement suivant que M est extérieur ou intérieur à S_0, est *l'altitude* du point M.

Géoïde. — On peut considérer la surface formée par le niveau moyen des mers comme une surface de niveau particulière, qui sera supposée prolongée sous les continents : en sillonnant ceux-ci de canaux en communication avec les mers, leur surface libre appartiendrait à la même surface de niveau.

Par niveau moyen des mers, il faut d'ailleurs entendre celui qu'aurait l'eau si elle était en équilibre relatif, abstraction faite par conséquent des marées, des courants, des vents, etc. Cette surface idéale, mais de définition suffisamment nette cependant, est de niveau, car la surface des eaux tranquilles est normale à la verticale telle qu'elle a été définie.

Cette surface particulière est la *surface mathématique* de la Terre, ou le *géoïde*.

En géodésie, c'est le géoïde qui sert de surface fondamentale de référence ; les altitudes rapportées au géoïde sont les altitudes proprement dites, comptées, comme on dit, au-dessus du niveau de la mer. La détermination du géoïde et celle de la surface physique de la Terre par rapport au géoïde, sont les problèmes fondamentaux de la géodésie supérieure.

Sur le géoïde, on appelle *parallèles* et *méridiens* les lignes lieux géométriques des points d'égale latitude, ou d'égale longitude : ce sont des courbes gauches qui ne sont, pas plus que le géoïde lui-même, susceptibles d'une définition mathématique simple.

Ellipsoïde de révolution. — Le géoïde s'écarte très peu de la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ayant pour centre le centre de gravité O de la Terre, et pour axe de révolution l'axe du monde, supposé invariablement fixé à la Terre.

Le demi-grand axe a de cet ellipsoïde peut être pris égal à 6 378 200 mètres, valeur moyenne entre plusieurs déterminations, recommandée par Helmert (1907).

Si b est le demi-petit axe, on appelle *aplatissement* le rapport $\frac{a-b}{a}$, et en le désignant par α, on peut prendre avec Hayford (1909)

$$\alpha = \frac{1}{297,0},$$

de sorte que

$$b = 6\,356\,725 \text{ mètres.}$$

Cette valeur de α a été adoptée par la *Conférence internationale des éphémérides astronomiques* (Paris, 1911) pour unifier le calcul des parallaxes, éclipses et occultations.

En chiffres ronds, la Terre est donc une sphère de rayon égal à 6 370 kilomètres, et dans bien des cas, on peut se borner à cette approximation.

Pour les besoins de l'Astronomie, il est plus que suffisant d'adopter pour la forme du géoïde, celle de l'ellipsoïde de révolution précédent, et de supposer en outre que les surfaces de niveau voisines sont parallèles à cet ellipsoïde. Dans ces conditions, si M est un lieu terrestre quelconque, le méridien

de ce lieu sera le plan qui passe par M et par l'axe du monde OI ; ce plan coupe la terre suivant une ellipse méridienne dont les axes AA′ et BB′ sont $2a$ et $2b$, le premier dans l'équateur, le second suivant OI (*fig.* 20). Si l'on mène du point M une normale à l'ellipse précédente, dont le pied soit en M′ voisin de M, cette normale est la verticale de M, comme celle de M′; la latitude de M, comme celle de M′, est l'angle φ de OA avec M′M, pris avec le signe convenable ; enfin l'altitude de M est la longueur du segment M′M, prise positivement ou négativement suivant le cas.

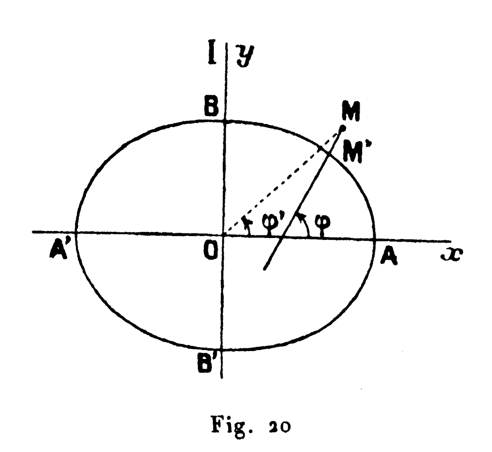


Fig. 20

Sur l'ellipsoïde même, les parallèles et les méridiens définis comme lieux des points d'égale latitude ou longitude, sont précisément les parallèles et les méridiens géométriques : les parallèles sont des cercles, les méridiens sont tous égaux à l'ellipse méridienne.

Pour les distinguer des éléments vrais, les éléments que nous venons de définir à l'aide de l'ellipsoïde peuvent recevoir la qualification de *géodésiques* : verticale géodésique, latitude ou longitude ou altitude géodésique, parallèles ou méridiens géodésiques. La verticale vraie peut différer d'un très petit angle de la verticale géodésique : on est ainsi amené en géodésie à étudier les *déviations de la verticale*. Par suite aussi, la latitude géodésique peut différer très peu de la latitude vraie ou astronomique : mais ces divergences sont pour nous sans intérêt.

Coordonnées rectangulaires et polaires d'un point de la surface de la Terre. — Soit un point M de latitude φ et d'altitude h ; pour fixer commodément la position de ce point par rapport au centre de la Terre, il est nécessaire de connaître ses coordonnées rectangulaires ou polaires par rapport aux axes de l'ellipse déterminée dans le géoïde par le méridien du lieu M (*fig.* 20).

Ces axes étant Oy suivant l'axe du monde, et Ox dans l'équateur, dirigé de façon que l'angle de Ox avec la verticale ascendante de M soit aigu, les coordonnées rectangulaires de M seront x et y ; ses coordonnées polaires seront d'abord le rayon vecteur OM, que nous désignerons par $a\rho$, a étant comme ci-dessus le rayon équatorial, puis l'angle que fait Ox avec OM, soit φ' : cet angle est aigu, positif ou négatif en même temps que la latitude φ.

Le rayon vecteur OM, prolongé dans le sens OM, s'appelle la *verticale géocentrique* du point M, et définit le *zénith géocentrique* de M. L'angle φ' est la *latitude géocentrique* du point M.

Supposons d'abord l'altitude nulle : le point M appartient à l'ellipse méridienne du géoïde, et en désignant par ψ un angle auxiliaire compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on peut poser, en appelant b le rayon polaire,

$$\begin{cases} x = a \cos \psi, \\ y = b \sin \psi. \end{cases}$$

D'ailleurs, on a aussi

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi', \\ y = a\rho \sin \varphi'. \end{cases}$$

Il faut exprimer que le point M a pour latitude φ, c'est-à-dire, puisque la verticale est normale à l'ellipse, que l'on a

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dx}{dy}.$$

Or

$$dx = -a \sin \psi . d\psi, \qquad dy = b \cos \psi . d\psi ;$$

introduisant donc l'aplatissement α en observant que b vaut $a(1-\alpha)$, on a

$$\operatorname{tg} \psi = (1-\alpha) \operatorname{tg} \varphi ;$$

on en déduit immédiatement, si l'on veut, l'angle ψ, et soit à l'aide de cet angle auxiliaire, soit directement en fonction de φ, on a

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \rho \cos \varphi' = \cos \psi = \dfrac{\cos \varphi}{D}, \\ \dfrac{y}{a} = \rho \sin \varphi' = (1-\alpha) \sin \psi = \dfrac{(1-\alpha)^2 \sin \varphi}{D}, \end{cases}$$

en faisant

$$D = \sqrt{(1-\alpha)^2 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}.$$

En particulier, on a aussi

$$\operatorname{tg}\varphi' = (1-\alpha)^2 \operatorname{tg}\varphi, \qquad \rho^2 = \frac{(1-\alpha)^4 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{(1-\alpha)^2 \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}.$$

Prenant pour argument la latitude φ, il est facile, à cause de la petitesse de α, de réduire en tables les logarithmes des facteurs $\frac{1}{D}$ et $\frac{(1-\alpha)^2}{D}$; ajoutant ces logarithmes à ceux de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, on a immédiatement les logarithmes des coordonnées rectangulaires $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{a}$. On trouve de telles tables dans la Connaissance des Temps.

On peut encore procéder autrement, pour éviter le calcul direct, en développant en série la différence $\varphi' - \varphi$ et le logarithme de ρ, quantités toujours petites.

En faisant

$$k = \frac{1-(1-\alpha)^2}{1+(1-\alpha)^2},$$

on a d'abord, d'après le Chapitre II,

$$\varphi' - \varphi = -k \sin 2\varphi + \frac{1}{2} k^2 \sin 4\varphi - \frac{1}{3} k^3 \sin 6\varphi + \ldots..$$

D'autre part, on peut écrire, en faisant $\beta = 1 - \alpha$ pour abréger,

$$\rho^2 = \frac{1+\beta^4 + (1-\beta^4)\cos 2\varphi}{1+\beta^2+(1-\beta^2)\cos 2\varphi}$$

$$= \left(\frac{1+\beta^2}{1+\beta}\right)^2 \frac{1+\left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^2 + 2\,\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\cos 2\varphi}{1+\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 + 2\,\frac{1-\beta}{1+\beta}\cos 2\varphi}$$

Si donc on pose encore

$$k' = \frac{1-(1-\alpha)}{1+(1-\alpha)},$$

on aura, en prenant suivant une formule du Chapitre II les logarithmes vulgaires de module M,

$$\log\rho = \log\frac{1+(1-\alpha)^2}{1+(1-\alpha)} + M(k-k')\cos 2\varphi - \frac{M}{2}(k^2-k'^2)\cos 4\varphi$$
$$+ \frac{M}{3}(k^3-k'^3)\cos 6\varphi - \ldots$$

Les séries que nous venons d'obtenir sont très convergentes et d'un emploi commode : il est facile d'ailleurs de les réduire en tables, ainsi qu'il est fait dans la Connaissance des Temps.

En prenant $\alpha = \frac{1}{297}$, on trouvera en fait

$$\varphi' - \varphi = -11'35'',66 \sin 2\varphi + 1'',17 \sin 4\varphi - \ldots,$$

$$\log \rho = \bar{1},9992695 + 0,0007324 \cos 2\varphi - 0,0000019 \cos 4\varphi - \ldots..$$

La différence $\varphi - \varphi'$ s'annule à l'équateur et aux pôles ; en valeur absolue elle est maxima pour une latitude très voisine de $\pm 45°$, et reste toujours inférieure à $12'$.

Supposons maintenant que le point M ait une altitude h, et soit M' le pied de la normale abaissée de M sur la section de l'ellipsoïde terrestre par le plan méridien de M. Le rapport $\frac{h}{a}$ étant toujours très petit, on peut passer des coordonnées du point M' à celles du point M en se contentant d'employer des formules différentielles. Appelant x, y, ρ, φ' les coordonnées rectangulaires et polaires de M' telles que nous venons de les calculer en fonction de la latitude commune φ de M et de M', soient dx, dy, $d\rho$, $d\varphi'$ les accroissements que subissent ces coordonnées quand on passe de M' à M. Les accroissements dx et dy sont rigoureusement égaux aux projections du segment M'M sur les axes, c'est-à-dire à $h \cos \varphi$, $h \sin \varphi$; par suite on a, au degré d'approximation fixé,

$$\begin{cases} d(\rho \cos \varphi') = \cos \varphi'.d\rho - \rho \sin \varphi'.d\varphi' = \frac{h}{a} \cos \varphi. \\ d(\rho \sin \varphi') = \sin \varphi'.d\rho + \rho \cos \varphi'.d\varphi' = \frac{h}{a} \sin \varphi, \end{cases}$$

d'où immédiatement

$$\begin{cases} d\rho = \frac{h}{a} \cos (\varphi - \varphi'), \\ d\varphi' = \frac{h}{a\rho} \sin (\varphi - \varphi'). \end{cases}$$

A cause de la petitesse de $\frac{h}{a}$ et de l'angle $\varphi - \varphi'$, on pourra presque toujours se contenter de prendre $d\rho = \frac{h}{a}$, en négligeant complètement $d\varphi'$.

Arcs de méridien et de parallèles. — Cherchons encore à déterminer la longueur d'un arc de méridien terrestre. En appelant ds la différentielle de cet arc, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2[\sin^2\psi + (1-\alpha)^2\cos^2\psi]d\psi^2 = \frac{a^2(1-\alpha)^2}{D^2}d\psi^2;$$

d'autre part, la relation qui lie ψ à φ donne

$$d\psi = (1-\alpha)\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}d\varphi = \frac{1-\alpha}{D^2}d\varphi;$$

donc finalement

$$ds = \frac{a(1-\alpha)^2}{D^3}d\varphi.$$

L'arc de méridien compris entre deux points de latitudes φ_0 et φ_1 vaut donc

$$s = a(1-\alpha)^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{D^3}.$$

On obtiendra facilement la valeur de cette intégrale elliptique par un développement en série ordonné suivant les puissances de la petite quantité α. En négligeant le carré de l'aplatissement, on a simplement

$$\frac{1}{D^3} = (1 - 2\alpha\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + 3\alpha\sin^2\varphi = 1 + \frac{3\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2\varphi;$$

et par suite

$$s = a\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{3\alpha}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right].$$

Le rayon de courbure R du méridien terrestre à la latitude φ est précisément égal à $\frac{ds}{d\varphi}$, soit à $\frac{a(1-\alpha)^2}{D^3}$; la longueur d'un arc égal à 1° dans le cercle de rayon R, soit $\frac{\pi a(1-\alpha)^2}{180\, D^3}$, est ce qu'on appelle la longueur de l'arc de 1° sur le méridien à la latitude φ. Sa valeur approchée, obtenue en négligeant le carré de α, est

$$\frac{\pi a}{180}\left[1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{2}\cos 2\varphi\right].$$

Sur le parallèle de latitude φ, qui est un cercle de rayon égal à $\frac{a \cos \varphi}{D}$, d'après ce qui précède, la longueur de l'arc de 1° est $\frac{\pi a \cos \varphi}{180\, D}$, ou au même degré d'approximation que ci-dessus :

$$\frac{\pi a \cos \varphi}{180}\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos 2\varphi\right).$$

La Connaissance des Temps donne les longueurs de l'arc de 1° sur le méridien et sur les parallèles pour chaque degré de latitude.

Faisons une application numérique de l'ensemble des résultats précédents pour la latitude de Paris, 48°50′, en chiffres ronds.

On trouve en suivant une voie ou une autre :

$$\psi = 48°44'15'',20, \qquad \varphi' = 48°38'30'',25,$$

$$\log \rho = \bar{1},9991736, \quad \log \frac{x}{a} = \bar{1},8192208, \quad \log \frac{y}{a} = \bar{1},8745778\,;$$

longueur de l'arc de 1° sur le méridien : 111 207 mètres ;
longueur de l'arc de 1° sur le parallèle : 73 417 mètres.

CHAPITRE V

—

COORDONNÉES ASTRONOMIQUES — TEMPS

Les systèmes de coordonnées employés en Astronomie sont au nombre de quatre : ils nous sont imposés par les faits eux-mêmes, comme nous allons le constater.

Coordonnées horizontales. — L'origine O du système est le lieu d'observation ; l'axe Oz est la verticale, dirigée de façon que z corresponde au zénith ; le plan fondamental Oxy est celui de l'horizon du point O, et l'axe Ox est dirigé dans ce plan vers le Sud ; enfin le système est orienté dans le sens rétrograde, de sorte que l'axe Oy est dirigé vers l'Ouest (*fig.* 21).

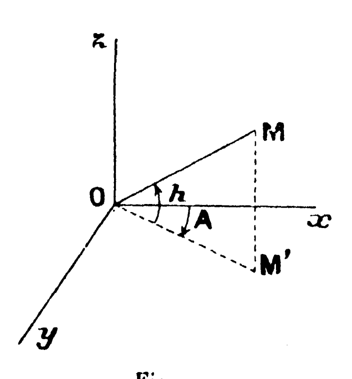


Fig. 21

Dans ce système, les coordonnées angulaires générales ψ et θ d'un point M, telles que nous les avons définies au Chapitre III, sont l'*azimut*, désigné par A, et la *hauteur*, appelée h ; le complément de la hauteur est la *distance zénithale*, ζ.

Il est clair que dans ces conditions la direction de l'axe du monde, en particulier, a pour azimut π et pour hauteur la latitude φ : il suffit pour s'en convaincre de se reporter aux définitions données dans le Chapitre précédent, et aux figures 19.

De même, on verra que la verticale géocentrique peut être considérée dans tous les cas comme ayant pour azimut o et

pour distance zénithale $\varphi - \varphi'$, φ' désignant la latitude géocentrique. Lorsque la latitude φ est négative, nous sommes ainsi dans le cas exceptionnel prévu précédemment au Chapitre III, la distance zénithale étant négative au lieu d'être comprise suivant la règle générale entre o et π.

Les demi-plans passant par la verticale Oz et limités à Oz sont des *verticaux*: en particulier le demi-plan Oyz, et celui qui le complète, constituent le premier vertical. Le lieu des points de même hauteur sur la sphère céleste de centre O est un petit cercle ayant pour pôle le zénith, et dit *cercle de hauteur*, ou *almucantarat*.

Les coordonnées horizontales sont des coordonnées *locales* dont l'usage s'impose évidemment *a priori*, en raison du rôle spécial de la verticale et de l'horizon : remarquons en particulier que les seuls astres visibles sont ceux qui sont au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire qui ont une hauteur positive.

Il peut être utile de transporter l'origine des coordonnées horizontales en un autre point, tout en conservant les directions primitives des axes. Si en particulier, c'est le centre T de la Terre que l'on prend comme nouvelle origine, on aura ainsi l'azimut et la hauteur géocentriques du point M, par rapport à l'horizon et à la verticale du point O, transportés parallèlement à eux-mêmes en T.

Disons enfin que la façon dont nous avons défini l'azimut, et que nous conserverons toujours, n'est pas universellement adoptée ; souvent on compte les azimuts, toujours dans l'horizon, à partir du Nord, ou encore d'un quelconque des quatre points cardinaux et dans un sens quelconque : il faudra donc toujours faire grande attention aux conventions faites à ce sujet.

Coordonnées horaires, ou équatoriales locales. — L'origine O du système est toujours le lieu d'observation ; l'axe Oz est dirigé suivant l'axe du monde, de façon que z corresponde au pôle Nord ; le plan fondamental Oxy est alors celui de l'équateur relatif au point O, et l'axe Ox est dirigé dans ce plan vers le point le plus haut de l'équateur ; enfin le système est orienté dans le sens rétrograde, de sorte que l'axe Oy est,

comme dans le système précédent, dirigé vers l'Ouest. Comme dans le système précédent encore, le plan Oxz est le méridien du lieu O, mais limité cette fois à la ligne des pôles, et non plus à la verticale (*fig.* 22).

Ici les coordonnées angulaires générales ψ et θ d'un point M sont l'*angle horaire,* H, et la *déclinaison*, δ; le complément de la déclinaison est la *distance polaire Nord*, ou simplement distance polaire, P.

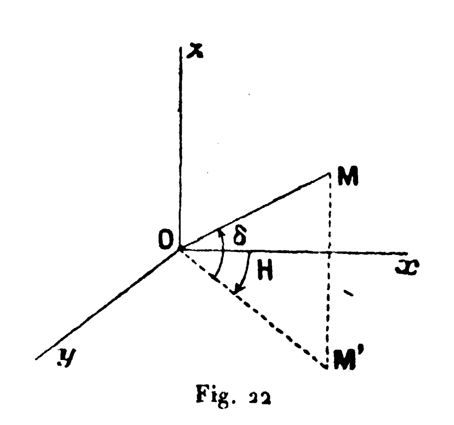


Fig. 22

On exprime d'habitude les angles horaires en *temps*, c'est-à-dire en heures, minutes et secondes, l'heure étant la 24e partie de la circonférence, la minute (de temps) la 60e partie de l'heure, la seconde (de temps) la 60e partie de la minute (de temps).

Il en est de même en général des longitudes géographiques.

On voit sans peine que la verticale a toujours un angle horaire nul, sa déclinaison étant la latitude φ; il en est de même de la verticale géocentrique, sauf que sa déclinaison a pour valeur la latitude géocentrique φ'.

Les demi-plans passant par l'axe Oz, ou ligne des pôles, et limités à Oz, déterminent sur la sphère céleste de centre O des *cercles horaires*; sur cette sphère, le lieu des points de même déclinaison est un petit cercle ayant pour pôle le pôle boréal, et dit *cercle de déclinaison.*

Les coordonnées horaires sont encore des coordonnées locales qui nous sont imposées par les apparences bien connues du *mouvement diurne.*

Comme précédemment, il peut être utile de transporter l'origine des coordonnées horaires en un autre point, tout en conservant les directions positives des axes. Si en particulier on choisit comme nouvelle origine le centre T de la Terre, on aura ainsi l'angle horaire et la déclinaison géocentriques du point M par rapport aux axes relatifs au point O, transportés parallèlement à eux-mêmes en T.

Coordonnées équatoriales célestes. — L'origine O du système étant un point quelconque, l'axe Oz est dirigé, comme pour les coordonnées horaires, suivant l'axe du monde, de sorte que le plan fondamental Oxy est toujours l'équateur relatif à O ; mais l'axe Ox est dirigé vers un point idéal de l'équateur situé à l'infini, qui sera défini plus tard avec précision, et qu'on appelle *équinoxe de printemps*, ou *point vernal*, γ.

De plus, le système est orienté dans le sens direct (*fig.* 23).

La coordonnée angulaire ψ d'un point M est ici *l'ascension droite*, α ; quant à la coordonnée θ, c'est la déclinaison, δ, comme dans le système précédent.

L'ascension droite s'exprime toujours en temps.

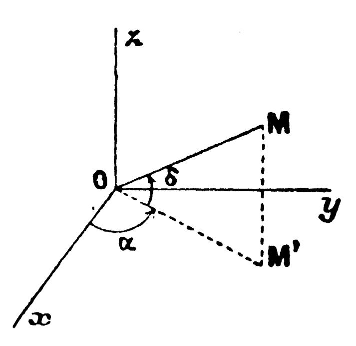


Fig. 23

Revenant aux coordonnées horaires relatives à un lieu d'observation O, l'angle horaire correspondant du point vernal est par définition le *temps sidéral local*, t. Il est clair alors que, pour une direction quelconque d'ascension droite α et d'angle horaire H, on a la relation fondamentale

$$\alpha + H = t,$$

naturellement à un multiple près de 2π ou 24 heures : ceci résulte de ce que les coordonnées équatoriales locales ou célestes ont même plan fondamental.

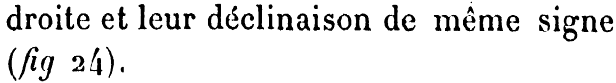
En particulier, l'ascension droite du zénith vrai ou géocentrique n'est autre que le temps sidéral local.

Ce système de coordonnées définit les positions des étoiles indépendamment du lieu d'observation, car les dimensions de la Terre sont négligeables devant la distance des étoiles à la Terre ; de plus, les directions du point vernal et de l'équateur variant peu par rapport aux étoiles, le système offre l'avantage que l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile varient peu.

Coordonnées écliptiques. — Dans ce système, qui est encore orienté dans le sens direct, l'axe Ox est le même que dans

le système précédent, dirigé vers l'équinoxe du printemps.

Mais le plan fondamental Oxy est un plan particulier, dit plan de *l'écliptique* relatif au point O, parallèle au plan de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre, et que nous définirons plus tard avec précision. Le plan de l'écliptique EE′ fait avec l'équateur un angle ε qui varie peu, égal à 23°27′ environ, dit *obliquité de l'écliptique*, et de telle façon que les points de l'écliptique voisins du point vernal γ aient leur ascension



droite et leur déclinaison de même signe (*fig* 24).

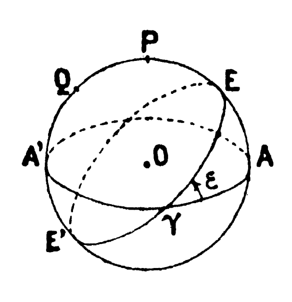


Fig. 24

L'axe Oz du système de coordonnées envisagé est alors dirigé vers le pôle boréal Q de l'écliptique, c'est-à-dire vers celui des deux pôles du grand cercle EE′ qui est, par rapport à l'équateur AA′, dans le même hémisphère que le pôle boréal P. Les coordonnées angulaires ψ et θ sont la *longitude*, λ, et la *latitude*, β.

Il n'y a évidemment aucune confusion possible entre ces coordonnées célestes et les coordonnées géographiques de mêmes noms qui définissent un lieu à la surface de la Terre.

On voit immédiatement qu'en particulier le pôle du monde P a pour longitude $\frac{\pi}{2}$, pour latitude $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$; de même l'ascension droite et la déclinaison du pôle Q de l'écliptique sont respectivement $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

Les lieux géométriques des points d'égale longitude ou d'égale latitude sur la sphère céleste sont des cercles de longitude ou de latitude : les premiers sont des demi-grands cercles contenant le pôle Q de l'écliptique, les seconds sont des petits cercles admettant Q comme pôle sphérique.

Le système des coordonnées écliptiques est encore un système de coordonnées célestes ; il offre les mêmes avantages que le précédent pour définir la position des étoiles, et il nous est imposé par l'importance prépondérante pour nous du Soleil.

Quelques problèmes de transformation de coordonnées. — Nous allons passer rapidement en revue les problèmes qui se présentent usuellement quand on veut passer d'un des systèmes de coordonnées que nous venons de définir à un autre, en réservant toutefois pour un Chapitre spécial les problèmes de parallaxe.

1° *Passage des coordonnées horizontales aux coordonnées équatoriales de même origine.*

Tout d'abord la relation

$$\alpha + \text{H} = t \tag{1}$$

permet toujours de passer de l'ascension droite à l'angle horaire, ou inversement, connaissant le temps sidéral local t.

En nous reportant aux notations du Chapitre III, on voit immédiatement que pour définir la position du système des coordonnées horizontales par rapport à celui des coordonnées horaires, et en choisissant l'Ouest pour point I, on doit faire

$$\sigma = \sigma' = \frac{\pi}{2}, \qquad i = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

φ désignant comme toujours la latitude de l'origine des coordonnées.

Il suffit alors de remplacer ψ', θ', ψ, θ par A, h, H, δ dans les formules du Chapitre III, pour avoir l'ensemble des relations qui résolvent le problème actuel.

Pour calculer l'azimut et la hauteur en fonction de l'angle horaire et de la déclinaison, on aura donc :

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos h \sin \text{A} &= \cos \delta \sin \text{H}, \\ \cos h \cos \text{A} &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos \text{H}, \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \text{H}, \end{aligned} \right.$$

ou

$$(2^{bis}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos h \sin \text{A} &= \cos \delta \sin \text{H}, \\ \cos h \cos \text{A} &= m \sin (\varphi - \text{M}), \\ \sin h &= m \cos (\varphi - \text{M}), \end{aligned} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} m \sin \text{M} &= \sin \delta, \\ m \cos \text{M} &= \cos \delta \cos \text{H}. \end{aligned} \right.$$

L'angle parallactique S est encore donné par

$$(3)\quad \begin{cases} \cos h \sin S = \cos\varphi \sin H, \\ \cos h \cos S = \sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos H \\ \qquad\qquad = m_1 \sin(\varphi - M_1), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} m_1 \sin M_1 = \sin\delta\cos H, \\ m_1 \cos M_1 = \cos\delta. \end{cases}$$

Les formules de Delambre donnent à la fois A, h, S :

$$(4)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{h}{2}\right)\sin\frac{A+S}{2} = \sin\frac{H}{2}\cos\frac{\varphi+\delta}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{h}{2}\right)\cos\frac{A+S}{2} = \cos\frac{H}{2}\sin\frac{\varphi-\delta}{2}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{h}{2}\right)\sin\frac{A-S}{2} = \sin\frac{H}{2}\sin\frac{\varphi+\delta}{2}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{h}{2}\right)\cos\frac{A-S}{2} = \cos\frac{H}{2}\cos\frac{\varphi-\delta}{2}. \end{cases}$$

Les formules différentielles sont :

$$(5)\quad \begin{cases} \cos h.dA = \cos S\cos\delta.dH + \sin S.d\delta - \sin h\sin A.d\varphi, \\ \qquad dh = -\sin S\cos\delta.dH + \cos S.d\delta - \cos A.d\varphi. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème inverse, on aura de même

$$(6)\quad \begin{cases} \cos\delta\sin H = \cos h\sin A, \\ \cos\delta\cos H = \cos\varphi\sin h + \sin\varphi\cos h\cos A, \\ \qquad \sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos A, \end{cases}$$

ou

$$(6^{bis})\quad \begin{cases} \cos\delta\sin H = \cos h\sin A, \\ \cos\delta\cos H = n\cos(\varphi - N), \\ \qquad \sin\delta = n\sin(\varphi - N), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} n\sin N = \cos h\cos A, \\ n\cos N = \sin h. \end{cases}$$

De plus

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\delta\sin S = \cos\varphi\sin A, \\ \cos\delta\cos S = \sin\varphi\cos h + \cos\varphi\sin h\cos A \\ \qquad\qquad = n_1\cos(\varphi - N_1), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} n_1\sin N_1 = \cos h, \\ n_1\cos N_1 = \sin h\cos A; \end{cases}$$

ou bien encore :

$$(8)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{H-S}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{\varphi-h}{2},\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{H-S}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{\varphi+h}{2},\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{H+S}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\varphi-h}{2},\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{H+S}{2}=\cos\frac{A}{2}\sin\frac{\varphi+h}{2}. \end{cases}$$

Enfin

$$(9)\quad \begin{cases} \cos\delta.dH=\cos S\cos h.dA-\sin S.dh+\sin\delta\sin H.d\varphi,\\ d\delta=\sin S\cos h.dA+\cos S.dh+\cos H.d\varphi. \end{cases}$$

Toutes ces relations sont d'ailleurs faciles à retrouver directement sur le triangle de position ZPM, où Z et P désignent respectivement le zénith et le pôle : la figure 25 met en évidence les éléments de ce triangle et la façon dont ils sont comptés.

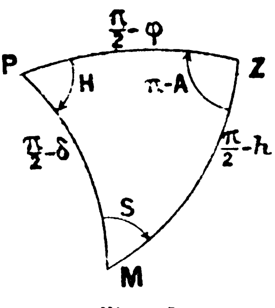


Fig. 25

Si l'on se trouvait dans les circonstances exceptionnelles prévues au Chapitre III, on appliquerait ce qui a été dit alors d'une façon générale.

Exemple. — On donne :

$$\alpha = 6^h40^m43^s,3 \qquad t = 3^h36^m50^s,7,$$
$$\delta = 23^\circ\ 7'\ 22'',4 \qquad \varphi = 43^\circ36'\ 46''.$$

On a d'abord

$$H = 20^h56^m7^s,4 = 314^\circ1'51'',$$

et l'on trouve les valeurs correspondantes :

$$A = 283^\circ19'24'',5, \quad h = 47^\circ11'44'',6, \quad S = 309^\circ59'50'',7;$$

de plus les formules différentielles sont :

$$dA = [\bar{1},9395]dH - [0,0521]d\delta + [0,0215]d\varphi,$$
$$dh = [\bar{1},8479]dH + [\bar{1},8080]d\delta - [\bar{1},3626]d\varphi;$$

$$dH = [\bar{1},6766]dA + [\bar{1},9206]dh - [\bar{1},4871]d\varphi,$$
$$d\delta = -[\bar{1},7165]dA + [\bar{1},8040]dh + [\bar{1},8420]d\varphi,$$

les coefficients étant représentés par leurs logarithmes placés entre crochets.

2° *Passage des coordonnées équatoriales célestes aux coordonnées écliptiques de même origine.*

Pour définir la position du système des coordonnées écliptiques par rapport à celui des coordonnées équatoriales, et en choisissant le point vernal pour point I, on doit faire

$$\sigma = \sigma' = 0, \qquad i = \varepsilon,$$

ε désignant l'obliquité de l'écliptique ; puis on remplace dans les formules générales du Chapitre III ψ', θ', ψ, θ, par λ, β, α, δ.

Pour calculer la longitude et la latitude en fonction de l'ascension droite et de la déclinaison, on aura donc

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta\sin\lambda &= \sin\varepsilon\sin\delta + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha,\\ \sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta\sin\lambda &= m\sin(\varepsilon + M),\\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha,\\ \sin\beta &= m\cos(\varepsilon + M),\end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} m\sin M &= \cos\delta\sin\alpha,\\ m\cos M &= \sin\delta.\end{aligned}\right.$$

L'angle à l'astre est donné par

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\beta\sin S &= \sin\varepsilon\cos\alpha,\\ \cos\beta\cos S &= \cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\\ &= m_1\sin(\varepsilon + M_1),\end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} m_1\sin M_1 &= \cos\delta,\\ m_1\cos M_1 &= \sin\delta\sin\alpha;\end{aligned}\right.$$

par les formules de Delambre, on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda + S}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta - \varepsilon}{2}\right),\\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda + S}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta + \varepsilon}{2}\right),\\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda - S}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta - \varepsilon}{2}\right),\\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda - S}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Les formules différentielles sont

$$(13)\quad \begin{cases} \cos\beta\,.\,d\lambda = \cos S\cos\delta\,.\,d\alpha + \sin S\,.\,d\delta + \sin\beta\cos\lambda\,.\,d\varepsilon, \\ \qquad d\beta = -\sin S\cos\delta\,.\,d\alpha + \cos S\,.\,d\delta - \sin\lambda\,.\,d\varepsilon. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème inverse, on a de même

$$(14)\quad \begin{cases} \cos\delta\sin\alpha = -\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda, \\ \cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda, \\ \qquad \sin\delta = \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda, \end{cases}$$

ou bien

$$(14\,bis)\quad \begin{cases} \cos\delta\sin\alpha = n\sin(N-\varepsilon), \\ \cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda, \\ \qquad \sin\delta = n\cos(N-\varepsilon), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} n\sin N = \cos\beta\sin\lambda, \\ n\cos N = \sin\beta. \end{cases}$$

De plus

$$(15)\quad \begin{cases} \cos\delta\sin S = \sin\varepsilon\cos\lambda, \\ \cos\delta\cos S = \cos\varepsilon\cos\beta - \sin\varepsilon\sin\beta\sin\lambda \\ \qquad\qquad = n_1\sin(N_1-\varepsilon), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} n_1\sin N_1 = \cos\beta, \\ n_1\cos N_1 = \sin\beta\sin\lambda; \end{cases}$$

ou bien encore

$$(16)\quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-S}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-S}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta-\varepsilon}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+S}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta+\varepsilon}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+S}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta-\varepsilon}{2}\right). \end{cases}$$

Enfin

$$(17)\quad \begin{cases} \cos\delta\,.\,d\alpha = \cos S\cos\beta\,.\,d\lambda - \sin S\,.\,d\beta - \sin\delta\cos\alpha\,.\,d\varepsilon, \\ \qquad d\delta = \sin S\cos\beta\,.\,d\lambda + \cos S\,.\,d\beta + \sin\alpha\,.\,d\varepsilon. \end{cases}$$

Exemple. — On donne :

$$\lambda = 317^\circ 52'\ 2'',9, \qquad \varepsilon = 23^\circ 27' 10'',9,$$
$$\beta = -7^\circ\ 0' 10'',4,$$

et l'on trouve les valeurs correspondantes :

$$\alpha = 21^h30^m29^s,32,\qquad \delta = -22^\circ 8' 19'',7,\qquad S = 18^\circ 34' 51'',8;$$

de plus les formules différentielles, écrites comme précédemment, sont

$$\begin{aligned} d\alpha &= \quad [0,0068]d\lambda - [\bar{1},5366]d\beta + [\bar{1},5096]d\varepsilon,\\ d\delta &= \quad [\bar{1},5001]d\lambda + [\bar{1},9768]d\beta - [\bar{1},7832]d\varepsilon;\\[1ex] d\lambda &= \quad [\bar{1},9467]d\alpha + [\bar{1},5066]d\delta - [\bar{2},9595]d\varepsilon,\\ d\beta &= -[\bar{1},4700]d\alpha + [\bar{1},9768]d\delta + [\bar{1},8266]d\varepsilon; \end{aligned}$$

3° *Passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales pour un plan.*

Si Ω, j, ω (ou $\varpi = \Omega + \omega$) sont les éléments fixant la position d'un plan dans le système des coordonnées écliptiques, tels que nous les avons définis au Chapitre III, et si Ω', j', ω' (ou $\varpi' = \Omega' + \omega'$) sont les éléments correspondants dans le système des coordonnées équatoriales célestes, on aura immédiatement, d'après les formules générales (29) et (30) du Chapitre III,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin j' \sin \Omega' = \sin j \sin \Omega,\\ &\sin j' \cos \Omega' = \sin\varepsilon \cos j + \cos\varepsilon \sin j \cos\Omega = m \sin(M + \varepsilon),\\ &\qquad \cos j' = \cos\varepsilon \cos j - \sin\varepsilon \sin j \cos\Omega = m \cos(M + \varepsilon),\\ &\sin j' \sin(\omega' - \omega) = \sin\varepsilon \sin\Omega,\\ &\sin j' \cos(\omega' - \omega) = \cos\varepsilon \sin j + \sin\varepsilon \cos j \cos\Omega = m_1 \sin(M_1 + \varepsilon), \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$\left\{\begin{aligned} m \sin M &= \sin j \cos\Omega, &\qquad m_1 \sin M_1 &= \sin j,\\ m \cos M &= \cos j, & m_1 \cos M_1 &= \cos j \cos\Omega; \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{j'}{2} \sin\left(\frac{\Omega'}{2} - \frac{\omega' - \omega}{2}\right) &= \sin\frac{\Omega}{2} \sin\frac{j - \varepsilon}{2},\\ \sin\frac{j'}{2} \cos\left(\frac{\Omega'}{2} - \frac{\omega' - \omega}{2}\right) &= \cos\frac{\Omega}{2} \sin\frac{j + \varepsilon}{2},\\ \cos\frac{j'}{2} \sin\left(\frac{\Omega'}{2} + \frac{\omega' - \omega}{2}\right) &= \sin\frac{\Omega}{2} \cos\frac{j - \varepsilon}{2},\\ \cos\frac{j'}{2} \cos\left(\frac{\Omega'}{2} + \frac{\omega' - \omega}{2}\right) &= \cos\frac{\Omega}{2} \cos\frac{j + \varepsilon}{2}. \end{aligned}\right.$$

Pour résoudre le problème inverse, on a les mêmes formules où l'on échange les lettres non accentuées avec les lettres accentuées, et où l'on change le signe de ε.

Exemple. — On donne [1] :

$$☊ = 137°27'10'',0, \qquad \varpi = 290°12'47'',8,$$
$$j = 113°34'12'',2, \qquad \varepsilon = 23°27'26'',1,$$

et par suite

$$\omega = 152°45'37'',8.$$

On trouve alors les valeurs correspondantes :

$$☊' = 141°28'49'',2, \qquad \varpi' = 309°55'59'',8$$
$$j' = 95°37'32'',2, \qquad \omega' = 168°27'10'',6.$$

4° Passage des coordonnées héliocentriques, équatoriales ou écliptiques, aux coordonnées géocentriques de même nom.

Les formules (1), (2), (3), (4) du Chapitre III résolvent complètement le problème, en appelant, dans le système adopté, x, y, z les coordonnées rectilignes héliocentriques, x', y', z' les coordonnées rectilignes géocentriques, x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectilignes du Soleil par rapport à la Terre. Selon qu'il s'agit des coordonnées équatoriales ou des coordonnées écliptiques, on remplacera les lettres ψ et θ par α et δ, ou par λ et β.

Les mêmes formules résolvent le problème inverse.

Exemple. — On donne :

$$\alpha = 21^h30^m29^s,32 \qquad \alpha_0 = 22^h29^m22^s,63,$$
$$\delta = -22°\ 8'\ 19'',7, \qquad \delta_0 = -9°29'\ 13'',2,$$
$$\log r = \bar{1},613483, \qquad \log r_0 = \bar{1},995639\,;$$

et l'on trouve :

$$\alpha' = 22^h12^m55^s,56,$$
$$\delta' = -13°16'\ 21'',4,$$
$$\log r' = 0,141395.$$

---

[1] Exemple tiré de *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, par Th. v. Oppolzer.

Changement du lieu d'observation. — Lorsque le lieu d'observation change, les coordonnées célestes, c'est-à-dire l'ascension droite α, la déclinaison δ, la longitude λ, la latitude β d'une même *direction* ne changent pas ; au contraire, les coordonnées locales, soit l'angle horaire H, l'azimut A, la hauteur h, changent.

Mais il existe entre les angles horaires H et H′ d'une même direction rapportée à deux points O et O′ de la Terre, une relation fondamentale très simple. Si L est la longitude géographique du point O, c'est-à-dire l'angle du méridien origine avec le méridien de O, compté dans le sens rétrograde, il est clair que H + L est l'angle horaire de la direction considérée par rapport au méridien origine, puisque les plans des divers méridiens géographiques, comme les plans des cercles horaires relatifs aux divers lieux, sont tous parallèles à l'axe du monde. De même alors, si L′ est la longitude géographique du point O′, l'angle horaire de la direction donnée par rapport au méridien origine est H′ + L′, et par suite on a la relation cherchée :

$$H + L = H' + L',$$

toujours à un multiple de 2π près.

En particulier, si t est le temps sidéral local en O, t' le temps sidéral local en O′, à un même instant, t et t' sont les angles horaires d'une même direction, celle du point vernal, et l'on a

$$t + L = t' + L'.$$

Si, au lieu d'une direction, on envisage un astre réel M, ce qui précède reste vrai pour les angles horaires de M relatifs aux deux points O et O′, à un même instant, à la condition que la distance OO′ soit complètement négligeable par rapport aux distances OM et O′M : car alors les vecteurs OM et O′M peuvent être regardés comme parallèles. Mais, s'il en est pas ainsi, c'est-à-dire s'il s'agit d'un astre du système solaire, et non pas d'une étoile, pour que la proposition précédente reste vraie, il faut évidemment considérer H et H′ non plus comme les angles horaires relatifs aux points O et O′, mais comme les angles horaires géocentriques correspondants, c'est-à-dire définis par les axes des coordonnées horaires relatifs à O et O′,

transportés parallèlement à eux-mêmes au centre T de la Terre. Ces angles horaires géocentriques diffèrent d'ailleurs peu des angles horaires locaux correspondants, et nous apprendrons bientôt à passer des uns aux autres.

Détermination du temps. — Appelons H l'angle horaire d'un astre donné S, réel ou fictif, en un lieu donné O, étant bien entendu que si la distance OS n'est pas complètement négligeable par rapport aux dimensions de la Terre, H est en réalité l'angle horaire géocentrique correspondant au point O.

Si l'on assujettit H à varier d'une façon continue, au lieu de s'astreindre à le compter entre o et 2π par exemple, on constate que H va toujours en augmentant, en vertu du mouvement diurne.

Il en résulte qu'on peut se servir de H pour fixer sans ambiguïté une époque quelconque, c'est-à-dire pour *déterminer le temps* : et en effet, H variant toujours dans le même sens, à une valeur donnée de H correspond une époque parfaitement déterminée.

Prenons comme origine du temps, en O, le moment où l'angle horaire de S est nul, et supposons qu'à une époque quelconque cet angle horaire, suivi d'une façon continue, ait une valeur de la forme $2n\pi + H_0$, n étant un entier, et H_0 un angle compris entre o et 2π: l'époque envisagée peut alors être caractérisée par les deux nombres n et H_0; le premier, n, indique le nombre de *jours*, relatifs à l'astre S, qui se sont écoulés depuis l'origine; le second, H_0, correspond à la fraction de jour qui s'est écoulée depuis le commencement du $(n+1)^e$ jour jusqu'à l'instant dont il s'agit. Ces explications, qui supposent n positif ou nul, se transportent sans peine au cas de n négatif.

Il est convenable de choisir pour la détermination du temps un astre S, réel ou fictif, tel que son angle horaire H varie proportionnellement au temps absolu d'une façon sinon rigoureuse, au moins très approchée. Alors, en effet, le jour correspondant a une valeur constante : c'est la durée nécessaire pour que H augmente de 2π; de plus, si le jour est divisé en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes,

on voit que l'heure, la minute, la seconde ainsi définies, sont respectivement les durées nécessaires pour que l'angle horaire H, exprimé en temps, augmente d'une heure, d'une minute, d'une seconde. En réalité, on *mesure* ainsi le temps.

Le choix du point vernal comme astre fictif servant à déterminer le temps, satisfait aux conditions précédentes : le temps sidéral varie en effet d'une façon presque rigoureuse proportionnellement au temps absolu.

Temps vrai. — Mais ce choix ne correspond pas aux circonstances ordinaires de la vie, qui dépendent elles-mêmes du mouvement apparent du Soleil. On est donc amené à choisir le Soleil pour définir le temps ; alors l'angle horaire (géocentrique) du Soleil à un instant donné et en un lieu donné, est le *temps vrai local.*

Le temps vrai est incommode cependant, parce qu'il ne remplit pas avec assez d'exactitude la condition de varier proportionnellement au temps absolu.

Temps moyen. — On a donc substitué au Soleil, pour définir le temps, un astre fictif, supposé à l'infini, dit *Soleil moyen*, dont l'angle horaire varie d'une façon rigoureuse proportionnellement au temps absolu, et que nous définirons plus tard avec précision.

Le jour défini par le mouvement de cet astre fictif est le *jour solaire moyen* ou *jour moyen*, d'une durée constante : il est partagé en heures, minutes et secondes de temps moyen, comme nous l'avons dit. L'angle horaire du Soleil moyen en un lieu donné et à un instant donné est le *temps moyen astronomique local.*

C'est du temps moyen que l'on se sert pour fixer une époque. Quel que soit l'astre qui sert à déterminer le temps, le jour correspondant commence au moment où H_0, compris entre o et 2π, est nul. Le jour solaire moyen commence donc en un lieu donné au moment où l'angle horaire du Soleil moyen est nul, c'est-à-dire à *midi moyen.*

Date. — Pour définir complètement une époque, il faut se

donner d'abord le nombre de jours écoulés depuis le commencement d'un jour déterminé ; ceci se fait avec la *date*, suivant les règles du calendrier ; en Astronomie, on indique généralement la date de la façon suivante,

1923 Novembre 14,

par exemple.

Pour compléter la fixation de l'époque, on ajoute la connaissance de l'heure moyenne, c'est-à-dire de l'angle horaire H_0 du Soleil moyen, compris entre 0 et 2π, ou entre 0^h et 24^h. Une date complète astronomique sera donc, par exemple :

1923 Novembre 14, $21^h 35^m 43^s,7$.

Au lieu de donner l'heure moyenne, on peut donner l'heure sidérale ou l'heure vraie de l'époque : mais la date est toujours exprimée en jours moyens (ou en jours vrais dans quelques circonstances particulières, un jour vrai ayant toujours son commencement et sa fin dans le voisinage immédiat du jour moyen de même date).

Dans certains cas, on exprime l'heure en parties décimales du jour ; ainsi la date précédente serait aussi

1923 Novembre 14, 899812.

Quelquefois, on emploie des dates non usitées dans la vie civile, mais bien faciles à comprendre, en prolongeant les mois de part et d'autre de leur commencement et de leur fin. C'est ainsi que 1924 Janvier 0, 0 indique évidemment le midi moyen du 31 décembre 1923.

Enfin, on exprime dans certains cas le temps en parties décimales d'année ; mais alors, pour avoir une unité constante, il faut prendre pour durée de l'année sa valeur moyenne, c'est-à-dire encore la durée de l'année tropique, que nous définirons plus tard, soit $365^j,2422$.

Dans ces conditions, la date 1923 Novembre 14,0 s'exprimera sous la forme 1923, 8679, en prenant pour commencement de l'année le midi moyen du 1er Janvier : en effet, le nombre de jours écoulés depuis ce commencement est 317, et l'on a $\frac{317}{365,2422} = 0,8679$.

Période Julienne. — Pour comparer deux dates éloignées, on les exprime commodément en jours de la *période Julienne.* Cette période, due à Joseph Scaliger, renferme 7 980 années : elle est formée, pour des raisons aujourd'hui sans intérêt, par le produit des trois nombres 28, 19 et 15 qui représentent respectivement les cycles solaire, lunaire et d'indiction romaine.

L'an 1 de notre ère correspond à l'année 4714 de la période, de telle façon que la période Julienne embrasse et au delà tous les temps historiques, jusque dans un avenir reculé.

On convient, en chronologie, de compter les années d'après le calendrier Julien jusqu'à l'époque de la réforme Grégorienne (1582), et au-delà d'après le calendrier Grégorien : de sorte que l'année de transition 1582 n'a que 355 jours.

Pour numéroter les années, il ne faut pas oublier que l'an *zéro* des astronomes n'est autre que l'an *un* avant notre ère pour les chronologistes ; et par suite, si A est le millésime ordinaire d'une année avant Jésus-Christ, on doit la compter astronomiquement comme l'année — (A — 1) : c'est à cette condition seulement que le nombre d'années écoulées entre les commencements de deux années quelconques de millésimes A et A′ sera toujours A′ — A.

Le nombre de jours de la période Julienne écoulés depuis son commencement jusqu'au commencement d'une année de millésime astronomique A, est donné dans le calendrier Julien par le nombre entier égal ou immédiatement supérieur à :

$$1\,721\,058 + 365{,}25\ A.$$

Dans le calendrier Grégorien, ce nombre doit être diminué de 10, de 1583 à 1700 inclus ; de 11, de 1701 à 1800 inclus ; de 12, de 1801 à 1900 inclus ; de 13, de 1901 à 2100 inclus, et ainsi de suite, suivant les règles bien connues.

Exemple. — Exprimer en jours de la période Julienne la date 1923 Novembre 14, 21^h.

On trouve facilement 2 423 738,875.

De même pour le 21 Juin, 6^h de l'an 400 avant Jésus-Christ, on trouve : 1 575 495,25.

Le temps écoulé entre les deux époques est donc en jours :

$$848\,243{,}625.$$

Ces calculs sont facilités par des tables contenues dans les recueils d'éphémérides.

Changement de lieu. — Quel que soit l'astre employé pour définir le temps, la différence des heures à un même instant en deux lieux O et O′ est toujours égale et de signe contraire à la différence de leurs longitudes exprimées en temps, à un multiple de 2π près, en vertu de la relation

$$H + L = H' + L'.$$

Quand il s'agit de temps moyen, il convient de préciser non-seulement l'heure, mais aussi la date. Soit O′ l'origine des méridiens, c'est-à-dire Greenwich, de sorte que $L' = 0$; prenons la longitude L du lieu O comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, et soit H′ l'heure moyenne de Greenwich, comprise entre 0 et 2π. On formera d'abord la différence $H' - L$, sans aucune réduction : ceci fait, 1° si cette différence est comprise entre 0 et 2π, elle représente l'heure moyenne en O, et la date est la même qu'à Greenwich ; 2° si cette différence est supérieure à 2π, son excès sur 2π est l'heure moyenne en O, mais la date en O dépasse d'un jour celle de Greenwich ; 3° si cette différence est négative, on obtient l'heure moyenne en O en lui ajoutant 2π, mais la date en O est inférieure d'un jour à celle de Greenwich.

Telles sont les conventions adoptées.

Considérons, comme exemple, le méridien antipode ; sur son bord Ouest par rapport à Greenwich, la longitude est $\pi - \varepsilon$, ε étant infiniment petit, et la différence $H' - L$ est $H' - \pi + \varepsilon$; sur le bord Est au contraire, la longitude est $-\pi + \varepsilon$, et la différence $H' - L$ est $H' + \pi - \varepsilon$; l'heure est donc la même sur les deux bords, en négligeant ε, mais la date sur le bord Est dépasse d'une unité la date sur le bord Ouest. Si donc on traverse le méridien antipode en marchant toujours vers l'Ouest, il faut augmenter à ce moment la date d'un jour ; si au contraire on le traverse en marchant vers l'Est, il faut diminuer

la date d'un jour. Dans le premier cas, on saute un jour ; dans le second, on compte deux fois le même jour. C'est à cette condition seulement que l'on aura toujours la même date en un même lieu, de quelque côté qu'on y parvienne.

Cette règle pour le changement de date n'est pas appliquée d'une façon rigoureuse dans les îles de l'Océanie, situées aux antipodes de l'Europe ; en général ces îles ont conservé, pour le calcul des dates, la règle apportée par les navigateurs qui les ont découvertes, et comme cette règle était différente suivant que ceux-ci venaient de l'Est ou de l'Ouest, la *ligne de changement de date* n'est pas exactement l'antiméridien de Greenwich.

Temps civil. Temps universel. — En *temps civil*, le jour commence à minuit moyen, soit 12 heures plus tôt qu'en temps moyen astronomique : la date astronomique 1923 Novembre 14, 21^h devient donc en temps civil 1923 novembre 15, 9^h. Quant aux heures, elles sont comptées de 0 à 24, et souvent encore, dans la vie courante, de 0 à 12 pour le matin, et de 0 à 12 pour le soir.

Le *temps universel* est le temps civil du méridien de Greenwich. Jusqu'à maintenant, on faisait usage exclusivement du temps astronomique pour marquer les dates en temps moyen, dans la pratique de l'Astronomie : à partir de l'année 1925, on adoptera le temps civil, et spécialement le temps universel.

Temps légal. Système des fuseaux horaires. — Pour la commodité des relations nationales, les villes d'un même pays doivent user non pas de l'heure locale, mais d'une même heure appelée *heure légale*. Jusqu'à l'année 1911, l'heure légale en France et en Algérie était l'heure de temps moyen (civil) de Paris. La loi du 9 mars 1911, portant modification de l'heure légale française, pour la mettre en concordance avec le système universel des fuseaux horaires dont nous allons parler ci-dessous, dispose que, désormais, l'heure légale en France et en Algérie est l'heure de temps moyen de Paris, retardée de neuf minutes vingt et une secondes. Le temps légal en France est donc pratiquement le temps universel, la longitude de

Greenwich par rapport à Paris étant de $9^m 20^s,93$ Ouest.

Pour la commodité des relations internationales, la plupart des Etats ont adhéré au *Système des fuseaux horaires*, en prenant pour origine le méridien de Greenwich. Dans ce système, on partage la Terre en 24 fuseaux égaux, comprenant par suite chacun 15 degrés de longitude ; le méridien de Greenwich partage lui-même en deux parties égales le premier fuseau, qui s'étend par suite à $7°30'$ (ou 30 minutes, en temps) de longitude, de part et d'autre du méridien fondamental.

Tous les points situés dans ce premier fuseau marquent, au même instant, l'heure temps moyen de Greenwich, dite encore *heure de l'Europe Occidentale* ; c'est l'heure légale de la France.

Les points situés dans le fuseau suivant, en allant vers l'Est, marquent l'*heure de l'Europe Centrale*, qui avance exactement de 1^h sur l'heure de Greenwich, ou sur l'heure légale de la France.

Dans le fuseau suivant, on marque l'*heure de l'Europe Orientale*, qui avance de 2^h sur l'heure de Greenwich. Et ainsi de suite, jusqu'au 12ᵉ fuseau après le fuseau initial, dans lequel l'heure avance de 12^h sur Greenwich. Vers l'Ouest, au contraire, l'heure marquée dans chacun des fuseaux successifs retarde de 1^h, 2^h, 3^h,..., 12^h sur l'heure de Greenwich.

Il faut ajouter que dans un même Etat d'étendue restreinte, on marque une seule heure, généralement cèlle du fuseau qui contient la capitale ; quant aux Etats de très grande étendue, ils sont partagés en plusieurs régions soumises à une règle analogue.

Passage du temps sidéral au temps moyen. — Le temps sidéral et le temps moyen variant proportionnellement au temps absolu (d'une façon du moins très approchée pour le temps sidéral), sont susceptibles d'être déterminés à l'aide des instruments appelés *pendules* ou *chronomètres*, en dehors de l'observation des astres mêmes qui définissent ces temps : cette observation est toutefois indispensable pour contrôler la marche des instruments. Le temps sidéral et le temps moyen varient évidemment, d'une façon presque parfaitement rigoureuse, proportionnellement l'un à l'autre. En fait, le jour sidéral

vaut un jour moyen diminué de $3^m55^s,909$ de temps moyen ; le jour moyen vaut un jour sidéral augmenté de $3^m56^s,555$ de temps sidéral.

Si donc une durée est mesurée en temps sidéral par θ_s, en temps moyen par θ_m, on a des relations de la forme

$$\theta_s = \theta_m(1 + \lambda), \quad \theta_m = \theta_s(1 - \mu),$$

avec

$$\lambda = \frac{3^m56^s,555}{24^h} = 0,0027379.$$

$$\mu = \frac{3^m55^s,909}{24^h} = 0,0027304,$$

$$(1 + \lambda)(1 - \mu) = 1, \quad \mu = \frac{\lambda}{1 + \lambda}, \quad \lambda = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

La Connaissance des Temps renferme des tables qui permettent de transformer à vue une durée de temps sidéral en temps moyen, et inversement.

Comme nous l'avons déjà dit, on fixe une époque en donnant la date, et de plus le temps moyen ou le temps sidéral correspondant ce jour-là à l'époque considérée. Il est nécessaire alors de savoir passer de l'heure moyenne à l'heure sidérale, et inversement.

Soient, en un lieu de longitude L, t et T les heures sidérale et moyenne qui correspondent à un même instant ; soit de plus t_0 le temps sidéral à l'origine du jour de même date, sur le méridien de Greenwich, fourni par la Connaissance des Temps. Le temps moyen de Grenwich, pour l'instant considéré, rapporté à la même date, est $T + L$ (quantité qui n'est pas nécessairement comprise entre o et 2π) ; par suite le temps sidéral de Greenwich, au même instant, est $t_0 + (T + L)(1 + \lambda)$, et l'on a la relation

$$t = t_0 + (T + L)(1 + \lambda) - L,$$

ou

$$t = t_0 + T + (T + L)\lambda;$$

la correction $(T + L)\lambda$ est donnée immédiatement par l'une des tables que l'on trouve dans la Connaissance des Temps.

Cette valeur de t devra naturellement être réduite entre o et 2π.

Inversement, on a

$$T + L = \frac{t - t_0 + L}{1 + \lambda} = (t - t_0 + L)(1 - \mu),$$

ou

$$T = t - t_0 - (t - t_0 + L)\,\mu,$$

et la correction $(t - t_0 + L)\,\mu$ est fournie à vue par les tables.

Dans cette seconde formule, t n'est déterminé qu'à un multiple de 2π près ; mais puisque la date est donnée, T doit être compris entre o et 2π : on choisira donc les valeurs de t qui donnent pour T une valeur convenable ; en général il n'y en aura qu'une, mais exceptionnellement, on pourra en trouver deux : toutefois, pratiquement, il n'y aura pas d'ambiguïté.

Exemples. — 1° Le 9 novembre 1923, à $3^h 25^m 44^s,77$ de temps moyen astronomique local, quelle est l'heure sidérale, sachant que la longitude (par rapport à Greenwich) est $+\ 8^h 6^m 34^s,9$ (Mount-Hamilton).

On a ici

$$t_0 = 15^h 10^m 32^s,26,$$
$$T + L = 11^h 32^m 19^s,67, \qquad (T + L)\lambda = 1^m 53^s,73,$$
$$t = 18^h 38^m 10^s,76.$$

2° A Greenwich, le 9 novembre 1923, déterminer le temps moyen astronomique correspondant à $15^h 14^m 8^s,96$ de temps sidéral.

Ici encore

$$t_0 = 15^h 10^m 32^s,26,$$

et par suite on peut prendre

$$t - t_0 = 3^m 36^s,70, \quad \text{ou bien} \quad t - t_0 = 24^h 3^m 36^s,70,$$

d'où

$$T = 0^h 3^m 36^s,11, \quad \text{ou bien} \quad T = 23^h 59^m 40^s,20.$$

Pour distinguer entre les deux solutions, il faut savoir si l'instant considéré est voisin du midi du 9 novembre ou du midi du 10 novembre : pratiquement, il ne saurait y avoir incertitude.

Remarque. — Il est facile de constater avec la Connaissance des Temps que le temps sidéral et le temps moyen ne varient pas proportionnellement l'un à l'autre d'une façon absolument rigoureuse. C'est ainsi que les midis moyens du 0 Janvier, du 2 Mai et du 1[er] Septembre 1923 sont des époques équidistantes ; les valeurs de t_0 correspondantes sont

$$18^h36^m30^s,85\,; \quad 2^h37^m30^s,39\,; \quad 10^h38^m30^s,14.$$

Les différences successives de ces nombres sont

$$8^h0^m59^s,54, \quad 8^h0^m59^s,75,$$

et ne sont pas absolument égales.

Nous verrons plus tard quelle est la cause de ce fait, dont on ne doit pas se préoccuper, puisque le temps sidéral ne sert qu'à marquer un instant déterminé dans un jour dont la date est exprimée en temps moyen, et que pendant une courte durée de quelques jours, le temps sidéral varie uniformément.

Passage du temps vrai au temps moyen. — On peut aussi fixer un instant par la date et le temps vrai à cet instant. Il est donc encore nécessaire de savoir passer de l'heure moyenne à l'heure vraie, et inversement.

Soient, en un lieu de longitude L, T et H l'heure astronomique moyenne et l'heure vraie qui correspondent à un même instant : la différence T — H, toujours petite, reçoit le nom d'*équation du temps*, E. Il est évident que l'équation du temps, à un même instant, est indépendante du lieu d'observation ; il suffit donc pour résoudre le problème proposé, de connaître l'équation du temps calculée pour Greenwich, et c'est ce que permettent les éphémérides.

Supposons d'abord T donné, et soit à calculer H ; le temps moyen à Greenwich pour l'instant considéré, et rapporté à la date donnée, est T + L ; si donc E_0 est l'équation du temps à midi moyen de Greenwich pour la date donnée, on aura $E = E_0 + \Delta E_0$, en appelant ΔE_0 l'accroissement de E_0 qui correspond à l'accroissement T + L de temps moyen ; et finalement on aura

$$H = T - E_0 - \Delta E_0.$$

On calculera ΔE_0 par interpolation, la quantité E_0 étant donnée de jour en jour pour midi moyen.

En réalité, la Connaissance des Temps donne sous le nom de *temps vrai à midi moyen*, pour Greenwich, non pas E_0, mais $-E_0$; en désignant cette donnée par E_0', on aura donc

$$H = T + E'_0 + \Delta E'_0.$$

$\Delta E'_0$ étant calculé par interpolation pour l'accroissement $T + L$ de temps moyen.

Inversement, soit à calculer T connaissant H ; la formule ci-dessus donne

$$T = H + E_0 + \Delta E_0.$$

E_0 étant toujours l'équation du temps à midi moyen de Greenwich pour la date donnée, et ΔE_0 sa variation pour l'accroissement $T + L$ de temps moyen : à la vérité on ne connaît pas *a priori* cette quantité $T + L$, mais la formule même en donne à vue une valeur suffisamment approchée pour permettre le calcul exact de ΔE_0.

Il faut encore observer que si l'on est aux environs du midi local, le temps vrai H, rapporté à la même date que le temps moyen T, pourra quelquefois un peu dépasser 24 heures, ou bien avoir une petite valeur négative, sans qu'il en résulte aucun inconvénient.

Exemple. — On demande le temps vrai local d'une observation faite le 9 Novembre 1923 à $3^h 25^m 44^s,77$ de temps moyen astronomique, en un lieu de longitude $8^h 6^m 34^s,9$.

On a ici $T + L = 11^h 32^m 19^s,7$, $E_0 = -16^m 10^s,03$, et en prenant l'heure pour unité de temps, les deux premières dérivées de E_0 sont $+0^s,191$, $+\frac{0^s,035}{24}$; il en résulte

$$\Delta E_0 = 11,539\left(0^s,191 + \frac{11,5 \times 0^s,035}{48}\right) = 2^s,30,$$

et par suite

$$H = 3^h 41^m 52^s,50.$$

Pour le problème inverse, prenant d'abord à vue $\Delta E_0 = 2^s$, on a une valeur approchée de $T + L$, soit $11^h 32^m 20^s$, avec laquelle le calcul peut être achevé exactement.

CHAPITRE VI

MOUVEMENT DIURNE

Mouvement diurne. — Nous allons appliquer les formules obtenues dans le Chapitre précédent, pour passer des coordonnées équatoriales aux coordonnées horizontales, à l'étude des apparences du *mouvement diurne*, c'est-à-dire à l'étude du mouvement apparent d'un astre qui a une ascension droite et une déclinaison fixes, au moins pendant un certain temps. C'est le cas des étoiles, d'une façon à peu près rigoureuse ; pour les autres astres, Soleil, Lune, planètes, comètes, les coordonnées célestes α et δ varient continuellement, mais d'une façon assez lente pour que, pendant l'intervalle d'un jour, leur mouvement soit sensiblement le même que celui d'une étoile voisine : toutefois, pour la Lune, on n'a ainsi qu'une approximation assez grossière.

L'ascension droite α étant fixe, la relation $H = t - \alpha$ montre que l'angle horaire H varie comme le temps sidéral, c'est-à-dire proportionnellement au temps absolu, et dans le même sens. On peut donc prendre H comme variable indépendante, au même titre que le temps. La périodicité évidente du mouvement montre alors qu'il suffit de faire varier H dans un intervalle de 2π, de $-\pi$ à $+\pi$ par exemple.

Variation de la hauteur. — La seconde formule différentielle (5) du Chapitre précédent donne pour dérivée de la hauteur par rapport à l'angle horaire :

$$\frac{dh}{dH} = -\sin S \cos \delta ;$$

d'ailleurs, on a dans le triangle de position, et aussi d'après les relations (2) et (3),

$$\frac{\sin S}{\cos \varphi} = \frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin H}{\cos h},$$

ce qui montre en passant que les angles H, A, S, étant tous choisis entre $-\pi$ et π, sont en même temps positifs ou négatifs. Eliminant S, on a donc

$$\frac{dh}{dH} = -\frac{\cos \varphi \cos \delta}{\cos H} \sin H,$$

ce qui nous montre que h croît quand H varie de $-\pi$ à o, et décroît quand H varie de o à π.

La hauteur h est donc maxima pour $H = 0$; l'astre est alors à son *passage supérieur* au méridien, ou à sa *culmination supérieure*. Au contraire, la hauteur h est minima pour $H = \pi$, et l'astre est alors à son *passage inférieur* au méridien, ou à sa *culmination inférieure*.

Si h_0 et h_1 sont les valeurs maxima et minima de h, on voit que si H varie de $-\pi$ à o, h augmente de h_1 à h_0, en variant toujours dans le même sens ; puis H variant de o à π, h diminue de h_0 à h_1. Les équations (2) et (3) mettent d'ailleurs en évidence que le mouvement de l'astre pendant cette seconde période est symétrique, par rapport au méridien, de son mouvement pendant la première période.

Soit A_0 l'azimut pour le passage supérieur ; les équations (2) et (3) montrent que :

1° si l'on a $\varphi - \delta > 0$ (l'angle $\varphi - \delta$ est toujours compris entre $-\pi$ et π), on a

$$A_0 = 0, \qquad h_0 = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \delta) ;$$

2° si l'on a $\varphi - \delta < 0$,

$$A_0 = \pi, \qquad h_0 = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \delta).$$

Dans le premier cas, le passage supérieur a lieu du côté du Sud ; dans le second cas, c'est du côté du Nord.

Soit de même A_1 l'azimut pour le passage inférieur ; on voit que

1° si l'on a $\varphi + \delta > 0$ (l'angle $\varphi + \delta$ est toujours compris entre $-\pi$ et π), on a

$$A_1 = \pi, \quad h_1 = (\varphi + \delta) - \frac{\pi}{2};$$

2° si l'on a $\varphi + \delta < 0$,

$$A_1 = 0, \quad h_1 = -(\varphi + \delta) - \frac{\pi}{2}.$$

Lever et Coucher. Circumpolaires. — L'astre n'est visible que si sa hauteur est positive : il faut donc savoir si celle-ci peut s'annuler. Faisant $h = 0$, la troisième formule (2) du Chapitre précédent donne

$$\cos H = -\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Si la somme des valeurs absolues de φ et δ, soit $|\varphi| + |\delta|$, est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, cette équation en H n'a pas de racines, et l'étoile reste toujours au-dessus ou au-dessous de l'horizon : on dit que c'est une *circumpolaire*. Si φ et δ sont de même signe, on a $h_1 > 0$, et par suite l'étoile est toujours au-dessus de l'horizon ; si au contraire φ et δ sont de signes contraires, on a $h_0 < 0$, et l'étoile reste toujours invisible.

Supposons maintenant $|\varphi| + |\delta| < \frac{\pi}{2}$; l'équation précédente en H admet alors deux racines, $\pm H'$, H' étant compris entre 0 et π ; pour $H = -H'$, l'astre est dans l'horizon, mais sa hauteur augmente, de sorte qu'il est à son *lever* ; pour $H = H'$, l'astre est encore dans l'horizon, mais sa hauteur décroît, de sorte qu'il est à son *coucher*.

H' est l'*arc semi-diurne* relatif aux valeurs de φ et de δ. Si $-A'$ et $+A'$ sont les azimuts qui correspondent à $-H'$ et $+H'$, A' étant comme H' compris entre 0 et π, on a

$$\cos A' = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

$A' - \frac{\pi}{2}$ est l'*amplitude* de l'étoile à son lever ou son coucher (amplitude *ortive* ou *occase*).

On peut observer qu'au moment du lever ou du coucher, le

triangle de position est rectilatère, et lui appliquer toutes les formules propres à ce cas. En particulier, on peut écrire

$$\operatorname{tg}^2 \frac{H'}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A'}{2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \delta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi + \delta}{2}\right)}.$$

Variation maxima de la hauteur. — Il est utile de savoir quand la hauteur varie le plus vite. Ecrivant

$$\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi \sin A,$$

nous voyons que la hauteur variera le plus rapidement lorsque sin A sera le plus grand possible en valeur absolue, ce qui nous conduit à étudier la variation de l'azimut.

Variation de l'azimut. — La première formule différentielle (5) nous donne

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos S \cos \delta}{\cos h};$$

éliminant cos S à l'aide de la deuxième équation (3), il vient

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos^2\delta \cos\varphi}{\cos^2 h} (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos H).$$

Il faut donc distinguer deux cas. Si l'on a $|\varphi| > |\delta|$, on voit que $\frac{dA}{dH}$ garde toujours le même signe, qui est celui de φ; l'azimut va donc toujours en croissant ou en décroissant, suivant que la latitude est positive ou négative ; sa valeur au moment du passage supérieur est nulle dans le premier cas, égale à $\pm \pi$ dans le second.

Supposons maintenant $|\varphi| < |\delta|$: l'équation

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta}$$

admet deux racines, $\pm H''$, H'' étant compris entre o et π. Alors, H partant de $-\pi$, l'azimut commence à croître ou à décroître suivant que la déclinaison δ est positive ou négative ; il atteint un maximum ou minimum $-A''$ pour $H = -H''$,

A'' étant compris entre o et π ; il varie ensuite en sens contraire, et devient minimum ou maximum pour $H = + H''$, en prenant la valeur A'' ; enfin, il recommence à croître ou à décroître.

A'' est la *plus grande digression* de l'astre.

Lorsque l'astre est à sa plus grande digression, l'azimut étant A'', le triangle de position est rectangle, l'angle en S étant droit, puisque d'après la première valeur de $\frac{dA}{dH}$, on a $\cos S = 0$. On peut appliquer toutes les formules relatives aux triangles rectangles, et en particulier, en désignant par h'' la hauteur correspondante, on a

$$\sin h'' = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \qquad \sin A'' = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}, \qquad \cos A'' = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} h''}.$$

Passage au premier vertical. — L'astre passe au premier vertical quand on a $A = \pm \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\cos A = 0$. Ceci a lieu par suite pour

$$\cos H = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Cette équation n'a de solutions que si l'on a $|\varphi| > |\delta|$, c'est-à-dire s'il n'y a pas plus grande digression. Elle admet alors deux racines, $\pm H'''$, H''' étant compris entre o et π, et à l'Ouest du méridien, le triangle de position est rectangle au zénith. Si h''' est la hauteur correspondante, on a en particulier

$$\sin h''' = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}.$$

Il est maintenant facile de connaître le moment de la plus grande variation de la hauteur h : ce sera pour le passage au premier vertical, ou pour le moment de la plus grande digression, suivant que l'on a $|\varphi| > |\delta|$, ou $|\varphi| < |\delta|$. Toutefois, ceci n'a de valeur pratique que si la hauteur h''' ou h'' est alors positive, c'est-à-dire si φ et δ sont de même signe ; dans le cas contraire, la variation de hauteur observable est maxima au lever ou au coucher.

Direction du mouvement diurne. — La direction du mouvement diurne, c'est-à-dire celle de la tangente menée à la trajectoire apparente d'une étoile dans le sens du mouvement, a évidemment pour coordonnées horaires $H' = H + \frac{\pi}{2}$, $\delta' = 0$, H étant l'angle horaire de l'astre. Son azimut A' et sa hauteur h' sont donc définis par les relations

$$\cos h' \cos A' = -\sin \varphi \sin H',$$
$$\cos h' \sin A' = \cos H',$$
$$\sin h' = -\cos \varphi \sin H';$$

pour $H' = 0$, on a $A' = \frac{\pi}{2}$, $h' = 0$; pour $H' = \pi$, on a $A' = -\frac{\pi}{2}$, $h' = 0$.

Vérification géométrique. — Il est facile de se rendre compte géométriquement de la plupart des résultats précédents. On sera amené à distinguer quatre cas principaux différents suivant que la latitude φ sera positive ou négative, plus grande ou plus petite en valeur absolue que $\frac{\pi}{2}$; et dans chacun de ces cas principaux, cinq classes différentes d'étoiles, suivant les valeurs de la déclinaison δ.

Supposons par exemple $\varphi > \frac{\pi}{4}$, ainsi qu'il arrive à Paris, où l'on a, à l'Observatoire,

$$\varphi = 48°50'11''.$$

a) On a $\delta > \varphi$ (*fig.* 26 *a*).

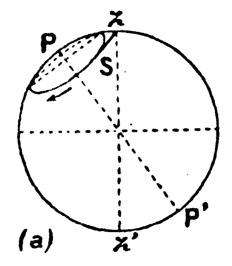


Fig. 26 (*a*)

L'étoile qui semble toujours décrire dans le sens rétrograde un petit cercle ayant pour pôle sphérique le pôle du monde P, est circumpolaire, toujours visible; ses deux passages au méridien ont lieu du côté du Nord, et l'on a :

$$h_0 = \frac{\pi}{2} + \varphi - \delta, \quad h_1 = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Il y a une plus grande disgression, qui correspond aux points tels que S où la trajectoire de l'étoile est tangente au vertical correspondant zS.

L'angle horaire H variant de $-\pi$ à o, l'azimut augmente d'abord de $-\pi$ à $-A''$, puis diminue de $-A''$ à $-\pi$; H variant de o à π, l'azimut diminue de π à A'', puis augmente de A'' à π. La plus grande digression A'' est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, puisqu'il n'y a pas passage au premier vertical.

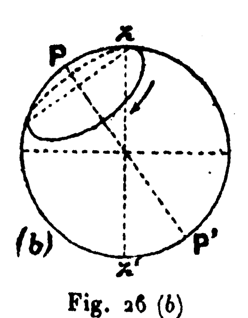


Fig. 26 (b)

b) On a $\frac{\pi}{2} - \varphi < \delta < \varphi$ (*fig.* 26 *b*).

L'étoile est encore circumpolaire, toujours visible ; le passage supérieur a lieu du côté du Sud, le passage inférieur du côté du Nord, et l'on a

$$h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta, \qquad h_1 = \varphi + \delta - \frac{\pi}{2}.$$

L'azimut va toujours en croissant de $-\pi$ à $+\pi$, quand H varie de $-\pi$ à $+\pi$.

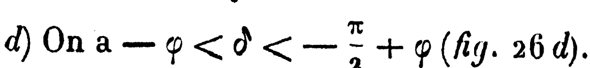
c) On a $-\frac{\pi}{2} + \varphi < \delta < \frac{\pi}{2} - \varphi$ (*fig.* 26 *c*).

L'étoile a un lever et un coucher ; son passage supérieur a lieu du côté Sud avec

$$h_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta.$$

Fig. 26 (c)

L'azimut va toujours en croissant.



d) On a $-\varphi < \delta < -\frac{\pi}{2} + \varphi$ (*fig.* 26 *d*).

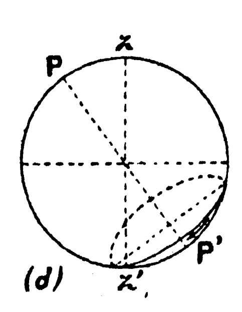


Fig. 26 (d)

L'étoile est une circumpolaire toujours invisible.

L'azimut croît toujours.

e) On a $\delta < -\varphi$ (*fig.* 26 *e*).

L'étoile est encore une circumpolaire toujours invisible ; mais il y a une plus grande digression. L'azimut décroît d'abord de o à $-A''$, puis croît de $-A''$ à $+A''$, décroît de A'' à o ; A'' est ici inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

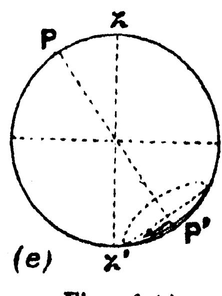


Fig. 26 (e)

On fera une discussion analogue dans les trois autres cas principaux.

Dérivées du second ordre. — Dans de nombreux problèmes pratiques relatifs au mouvement diurne, on peut avoir besoin des dérivées secondes de la hauteur et de l'azimut par rapport à l'angle horaire H. La formule

$$\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi \sin A$$

donne d'abord

$$\frac{d^2h}{dH^2} = -\cos\varphi \cos A \frac{dA}{dH} = -\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos A \cos S}{\cos h};$$

la formule

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos S \cos\delta}{\cos h},$$

ou, d'après la valeur de $\cos h \cos\delta$,

$$\frac{dA}{dH} = \frac{\cos\delta}{\cos^2 h}(\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos H),$$

donne ensuite

$$\frac{d^2A}{dH^2} = 2\frac{\cos\delta \sin h \cos S}{\cos^2 h}\frac{dh}{dH} + \frac{\cos\varphi \sin\delta \cos\delta \sin H}{\cos^2 h},$$

ou en remplaçant $\frac{dh}{dH}$ par $-\sin S \cos\delta$, et $\cos\varphi \sin H$ par $\cos h \sin S$,

$$\frac{d^2A}{dH^2} = \frac{\cos\delta \sin S}{\cos^2 h}(\sin\delta\cos h - 2\cos\delta \sin h \cos S).$$

Ces expressions peuvent être modifiées de bien des façons, en profitant des relations qui existent entre les éléments du triangle de position.

Contentons-nous ici de deux applications très simples. Quand l'astre passe au méridien, sa variation de hauteur pendant le temps très court dH est donnée par $\frac{1}{2}\frac{d^2h}{dH^2}dH^2$, puisque la dérivée première de h est nulle; en valeur absolue cette quantité est alors égale à $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{2\cos h}dH^2$.

Si maintenant on suppose l'astre dans l'horizon, on a

$$\frac{dh}{dH} = -\cos\varphi \sin A, \quad \frac{d^2h}{dH^2} = -\cos\varphi \sin A \operatorname{cotg} H,$$

comme on le voit en observant que dans le triangle de position, ici rectilatère, on a $\cos A \cos S = \cos H$, et $\cos \delta = \frac{\sin A}{\sin H}$. De même, on trouve sans peine

$$\frac{dA}{dH} = \sin\varphi, \quad \frac{d^2A}{dH^2} = -\cos^2\varphi \sin A \cos A.$$

Par suite, pendant un temps très court dH, les variations dh et dA de hauteur et d'azimut sont données avec une grande précision par les relations

$$dh = -\cos\varphi \sin A \left(dH + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} H \,.\, dH^2\right),$$

$$dA = \sin\varphi \,.\, dH - \frac{1}{2} \cos^2\varphi \sin A \cos A \,.\, dH^2.$$

Inversement donc, en fonction de dh, on aura

$$dH = -\frac{dh}{\cos\varphi \sin A} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} H \left(\frac{dh}{\cos\varphi \sin A}\right)^2;$$

et en remarquant qu'ici $\operatorname{cotg} H = \sin\varphi \operatorname{cotg} A$,

$$dA = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin A}\, dh - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\sin^2 A}\right) dh^2.$$

Ces formules, qui donnent le temps que met l'astre à s'élever de dh au-dessus de l'horizon, et la variation d'azimut correspondante, sont importantes en navigation.

Applications numériques. — 1° On donne :

$$\varphi = 10°, \quad \delta = 20°.$$

On a

$$h_0 = 80°, \quad A_0 = \pi,$$
$$h_1 = -60°, \quad A_1 = \pi.$$

L'étoile a une plus grande digression, et les éléments correspondants sont

$$H'' = 61°1',4 = 4^h4^m,1,$$
$$h'' = 30°30',7, \quad A'' = 107°24',6.$$

2° On donne :

$$\varphi = 60°, \quad \delta = 24°.$$

Ici

$$h_0 = 54°, \quad A_0 = 0; \quad h_1 = -6°, \quad A_1 = \pi.$$

Pour le coucher de l'étoile, on a

$$H' = 140°27',5 = 9^h 21^m,8, \quad A' = 144°26',2.$$

Il y a passage au premier vertical, et alors $dh = \mp \frac{1}{2} dH$: pour 1^m d'angle horaire, la hauteur varie de 7',5. Les éléments correspondants sont

$$H''' = 75°6',3 = 5^h 0^m,4, \quad h''' = 28°0',7.$$

Dans la minute d'angle horaire qui suit ou précède le passage supérieur au méridien, la hauteur varie de 1'',53. A partir de l'horizon, et au moment du coucher, pour une variation $dh = +50'$, on a

$$dH = -2°46',7 = -11^m,1, \quad dA = -2°23',9;$$

pour la variation $dh = -50'$, on aurait :

$$dH = +2°57',1 = 11^m,8, \quad dA = +2°33',9.$$

Ces dernières valeurs ne sont d'ailleurs qu'approchées, à quelques dixièmes de minute d'arc près.

Lever ou coucher apparent des astres. Crépuscules. — Nous verrons dans les deux Chapitres suivants que la hauteur d'un astre à un instant donné est modifiée par la réfraction et la parallaxe, son azimut ne changeant pas.

En particulier, les astres sans diamètre apparent sensible sont vus dans l'horizon lorsque leur hauteur vraie est égale à $-R_0$, en appelant R_0 la réfraction horizontale, pour laquelle on peut adopter une valeur moyenne de 34', en se plaçant dans les conditions météorologiques ordinaires : il n'y a d'ailleurs évidemment pas lieu de chercher ici une grande précision. On obtiendra donc les éléments du lever ou du coucher apparent de ces astres en supposant non plus $h = 0$, mais $h = -34'$.

Pour le centre du Soleil, il en est de même; mais on peut

aussi définir comme lever ou coucher du Soleil le moment où le bord supérieur de cet astre apparaît dans l'horizon ; le demi-diamètre apparent du Soleil étant de 16′ environ, on obtiendra alors les éléments du lever ou du coucher ainsi entendu, en supposant la hauteur du centre égale à — 50′.

Quand il s'agit de la Lune, il faut en outre tenir compte de sa parallaxe horizontale ϖ ; au moment du lever ou du coucher apparent de son centre, la hauteur de celui-ci est égale à $\varpi - R_0$; et comme ϖ a pour valeur moyenne 57′, cette hauteur devient + 23′ : elle peut d'ailleurs différer de cette valeur moyenne de 4′ à 5′ au plus, dans un sens ou dans l'autre. Si l'on envisage le lever ou coucher apparent du bord supérieur, cette hauteur se réduit encore en moyenne à + 7′, le demi-diamètre lunaire étant aussi de 16′ environ.

Dans presque tous les cas, la nouvelle hauteur est assez petite pour qu'on puisse obtenir une approximation suffisante en employant les formules différentielles établies ci-dessus

$$dH = -\frac{h}{\cos\varphi \sin A}, \qquad dA = -h\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin A};$$

dans le cas contraire, on se servira des formules développées précédemment, en tenant compte du carré de h, ou bien des formules rigoureuses.

Le problème des crépuscules dépend de considérations analogues.

On dit que le *crépuscule civil* commence le matin, ou finit le soir, au moment où la hauteur du centre du Soleil est égale à — 6° ; de même, le *crépuscule astronomique* commence ou finit le soir, au moment où cette hauteur est de — 18°. Les formules différentielles sont ici insuffisantes pour déterminer l'angle horaire correspondant au commencement ou à la fin du crépuscule, et il faut recourir aux formules exactes.

En un lieu donné, il est intéressant d'étudier comment varie la durée du crépuscule avec la déclinaison du Soleil. Proposons-nous le problème plus général suivant : soient H et H′ les angles horaires (supposés positifs) qui correspondent en un lieu donné de latitude φ, à une même déclinaison variable δ, et à deux hauteurs différentes fixes h, h' ; déterminer l'*extremum*,

c'est-à-dire le maximum ou le minimum, de la différence $H - H'$.

Soient aussi A, A', S, S', les azimuts et les angles parallactiques correspondants ; la déclinaison δ variant seule, on a, par les formules (5) du Chapitre précédent,

$$\frac{dH}{d\delta} = \frac{\cot g\, S}{\cos \delta} = \frac{\cos S}{\sin A \cos \varphi}, \qquad \frac{dH'}{d\delta} = \frac{\cot g\, S'}{\cos \delta} = \frac{\cos S'}{\sin A' \cos \varphi};$$

si donc la différence $H - H'$ doit être maxima ou minima, c'est-à-dire si

$$\frac{d(H - H')}{d\delta} = 0,$$

on aura

$$S = S', \qquad A + A' = \pi.$$

Plaçons alors les deux triangles PZS, PZS' de façon à faire coïncider les angles S et S' ; ils seront disposés comme le montre la figure 27, PZS' étant venu en PZ'S, et le triangle PZZ' étant isocèle. Menons l'arc de grand cercle PQ perpendiculaire sur SZ ; les deux triangles rectangles SPQ, ZPQ donnent

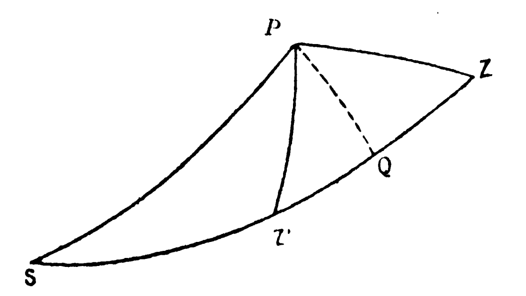


Fig. 27

$$\sin \delta = \cos PQ \sin \frac{h + h'}{2},$$

$$\sin \varphi = \cos PQ \cos \frac{h - h'}{2},$$

et par suite

$$\sin \delta = \sin \varphi \frac{\sin \frac{h + h'}{2}}{\cos \frac{h - h'}{2}};$$

de plus, le triangle ZPQ donne encore

$$\sin \frac{H - H'}{2} = \text{séc}\, \varphi \sin \frac{h' - h}{2}.$$

On a ainsi la valeur de δ qui correspond à l'extremum cherché, et cet extremum lui-même, s'il a lieu.

Envisageons par exemple les trois latitudes de 40°, 45°, 50°, et faisons successivement $h' = -6°$, $h' = -18°$ (valeurs qui correspondent aux crépuscules civil et astronomique), avec $h = 0$. On a les résultats suivants

	φ	δ	$H' - H$
pour $h' = -6°$	40°	$-1°,9$	31^m
	45°	$-2°,1$	34^m
	50°	$-2°,3$	37^m
pour $h' = -18°$	40°	$-5°,8$	1^h34^m
	45°	$-6°,4$	1^h42^m
	50°	$-7°,0$	1^h53^m ;

les valeurs de $H' - H$ sont des minima.

On peut se poser la même question en substituant aux angles horaires les azimuts : elle n'aurait d'ailleurs pas d'application utile dans le cas des crépuscules, mais seulement dans celui des levers ou couchers apparents, traités rigoureusement. On a de la même façon

$$\frac{dA}{d\delta} = \frac{1}{\cos\varphi \sin H}, \qquad \frac{dA'}{d\delta} = \frac{1}{\cos\varphi \sin H'},$$

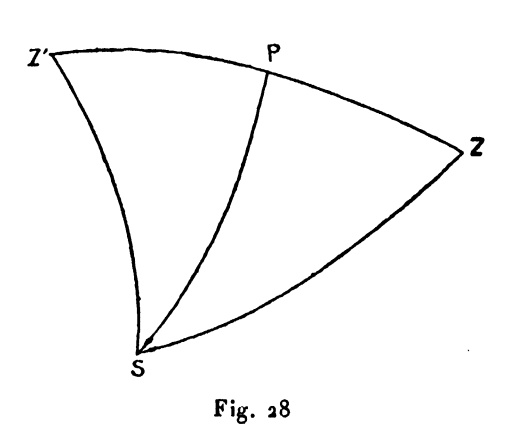


Fig. 28

et par suite la condition de l'extremum entraîne l'égalité

$$H + H' = \pi.$$

Plaçons les deux triangles PZS, PZS' de façon à leur donner le côté PS commun, et de part et d'autre de ce côté, comme le montre la figure 28, le triangle PZS' étant venu en PZ'S ; le point P est alors milieu de l'arc de grand cercle ZZ'. On a manifestement dans ces conditions

$$\sin h + \sin h' = 2 \sin\varphi \sin\delta,$$

c'est-à-dire

$$\sin\delta = \frac{\sin\frac{h + h'}{2}\cos\frac{h - h'}{2}}{\sin\varphi};$$

de plus, dans le triangle SZZ′, une formule de Delambre donne

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \cos \frac{Z\hat{S}Z'}{2} \text{ séc } \varphi \sin \frac{h' - h}{2},$$

ou bien, en remplaçant $\cos \frac{Z\hat{S}Z'}{2}$ par sa valeur en fonction des côtés :

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \text{séc } \varphi \sin \frac{h' - h}{2} \sqrt{\frac{\sin\left(\varphi + \frac{h + h'}{2}\right) \sin\left(\varphi - \frac{h - h'}{2}\right)}{\cos h \cos h'}},$$

le radical devant évidemment être pris avec le signe de sin φ. On a ainsi comme plus haut la valeur de δ qui correspond à l'extremum cherché, et cet extremum lui-même, s'il a lieu.

Tables. Pour faciliter l'application des formules relatives au mouvement diurne, on a construit des tables plus ou moins étendues qui trouvent leur principal usage en navigation.

On a réuni ici quelques tables extrêmement sommaires qui ont pour unique but de donner une idée suffisamment approchée des phénomènes tels qu'on peut les observer en France.

En supposant d'abord l'observateur placé sur le parallèle moyen de l'hémisphère boréal, qui traverse la France en passant un peu au Nord de Bordeaux et un peu au Sud de Grenoble, c'est-à-dire en prenant $\varphi = 45°$, les tables I et II donnent les valeurs de la hauteur h et de l'azimut A, en fonction de l'angle horaire H variant d'heure en heure et de la déclinaison δ variant de 15° en 15°. Il a suffi de donner à H et à δ des valeurs positives, puisque :

1° Si H change de signe, il en est de même de A, h ne changeant pas ;

2° si δ change de signe, et si en même temps on change H en 12^h — H, la hauteur h change de signe, et l'azimut A se change en 180° — A.

On trouve dans la table III, pour les trois latitudes 40°, 45°, 50°, les valeurs de l'angle horaire H′ et de l'azimut A′ au moment du coucher vrai, en fonction de la déclinaison δ variant de 5° en 5° ; dans les mêmes conditions, la table IV

donne les valeurs de l'angle horaire H'', de l'azimut A'' et de la hauteur h'' (supposée positive) au moment de la plus grande digression Ouest ; et la table V donne les valeurs de l'angle horaire H''' et de la hauteur h''' (supposée positive) au moment du passage au premier vertical Ouest.

La table VI donne, toujours pour les mêmes latitudes, les valeurs des variations dH et dA de l'angle horaire et de l'azimut, à partir des valeurs relatives au coucher vrai, en supposant la hauteur $h = 10'$; pour une petite hauteur différente, h', il suffit de multiplier les nombres de la table par le rapport $\frac{h'}{10'}$. La déclinaison varie ici entre les limites $\pm 30°$: c'est suffisant pour déterminer le coucher apparent du Soleil, de la Lune et des planètes.

Enfin la table VII donne encore pour les mêmes latitudes les valeurs de l'angle horaire à la fin du crépuscule civil ou astronomique du soir ; la valeur absolue de la déclinaison y est limitée à 25°, puisque la déclinaison du Soleil est comprise entre les limites $\pm$ 23° 27' environ.

Malgré la brièveté de ces tables, on peut les employer pour résoudre d'une façon qui est très suffisamment approchée la plupart du temps, les problèmes usuels relatifs au lever ou au coucher des astres.

Cherchons par exemple l'heure du coucher apparent du centre du Soleil, le 11 novembre 1923, à Paris

La latitude de Paris est $\varphi = 48°,8$; l'éphéméride du Soleil nous apprend qu'à la date donnée, la déclinaison de cet astre au moment de son passage au méridien du lieu est — 17°,2, et que cette déclinaison diminue de 0°,3 par jour : elle est donc évidemment très sensiblement égale à — 17°,3, au moment du coucher. Une interpolation rapide de la table III montre alors que pour ces valeurs de φ et de δ, l'angle horaire qui correspond au coucher vrai est à très peu près de 4^h36^m ; mais pour obtenir l'angle horaire du coucher apparent, il faut ajouter à ce nombre 4^m, comme le montre la table VI, en prenant $h = -34'$. Finalement l'angle horaire cherché, ou temps vrai local, est donc 4^h40^m. Mais à la date donnée, l'équation du temps vaut — 16^m, de sorte que le temps moyen

astronomique local devient 4^h24^m; retranchant encore 9^m, l'heure légale du phénomène envisagé est 16^h15^m.

On voit de plus par la table VII que l'angle horaire à la fin du crépuscule civil est 5^h16^m; la durée de ce crépuscule est donc 36^m, en fixant son commencement au moment du coucher apparent du centre du Soleil.

Cherchons encore l'heure du coucher apparent du centre de la Lune, le 16 novembre 1923, à Paris.

D'après l'éphéméride méridienne de la Lune, le temps moyen astronomique local du passage de la Lune au méridien de Paris, à la date donnée, est 7^h5^m; à ce moment la déclinaison est — 8°,1, et elle augmente de 9',4 par heure d'angle horaire. Un coup d'œil sur la table III suffit pour voir que l'angle horaire du coucher est environ de $5^h,5$: il faut donc prendre — 7°,2 pour la déclinaison correspondante, et l'angle horaire du coucher vrai devient plus exactement 5^h26^m; pour passer au coucher apparent, il faut se servir de la table VI, en prenant $h = 23'$, et par suite retrancher 2^m, ce qui donne 5^h24^m. Remarquant maintenant que le temps moyen augmente de 1^h2^m environ quand l'angle horaire de la Lune augmente de 1^h, on conclut que l'intervalle de temps moyen écoulé depuis le passage au méridien est de 5^h35^m, de sorte que l'heure moyenne astronomique locale du phénomène considéré est 12^h40^m; l'heure légale correspondante sera par suite 0^h31^m du 17 novembre.

TABLE I

Hauteur h pour la latitude de 45°

H\δ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0h	45°,0	60°,0	75°,0	90°,0	75°,0	60°,0	45°,0
1	43,1	57,4	70,9	79,4	72,5	59,3	45,0
2	37,8	50,8	62,1	68,9	66,7	57,3	45,0
3	30,0	41,8	51,9	58,6	59,6	54,3	45,0
4	20,7	31,7	41,3	48,6	52,1	50,8	45,0
5	10,5	21,1	30,8	39,0	44,8	46,9	45,0
6	0,0	10,5	20,7	30,0	37,8	43,1	45,0
7	— 10,5	0,4	11,3	21,8	31,4	39,5	45,0
8	— 20,7	— 9,1	2,7	14,5	25,8	36,3	45,0
9	— 30,0	— 17,5	— 4,6	8,4	21,2	33,6	45,0
10	— 37,8	— 24,1	— 10,2	3,8	17,8	31,6	45,0
11	— 43,1	— 28,5	— 13,8	1,0	15,7	30,4	45,0
12	— 45,0	— 30,0	— 15,0	0,0	15,0	30,0	45,0

TABLE II

Azimut A pour la latitude de 45°

H\δ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0h	0°,0	0°,0	0°,0	90°,0	180°,0	180°,0	180°,0
1	20,8	27,7	43,3	95,3	154,5	172,5	180,0
2	39,2	49,8	67,8	100,7	140,8	166,1	180,0
3	54,7	66,3	82,6	106,3	135,7	161,7	180,0
4	67,8	79,3	93,6	112,2	135,2	159,2	180,0
5	79,3	90,4	103,1	118,5	137,2	158,5	180,0
6	90,0	100,7	112,2	125,3	140,8	159,2	180,0
7	100,7	111,1	121,5	132,7	145,5	161,1	180,0
8	112,2	122,1	131,3	140,8	151,3	163,9	180,0
9	125,3	134,3	142,1	149,6	157,7	167,3	180,0
10	140,8	148,1	153,9	159,2	164,8	171,3	180,0
11	159,2	163,5	166,7	169,5	172,3	175,5	180,0
12	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

TABLE III

Angle horaire et azimut au moment du coucher

δ	φ = 40°		φ = 45°		φ = 50°	
	H'	A'	H'	A'	H'	A'
— 50°	0h.0m	0°,0				
— 45	2.12	22,6	0h.0m	0°,0		
— 40	3.1	33,0	2.12	24,6	0h.0m	0°,0
— 35	3.36	41,5	3.2	35,8	2.14	26,8
— 30	4.4	49,3	3.39	45,0	3.6	38,9
— 25	4.28	56,5	4.9	53,3	3.45	48,9
— 20	4.49	63,5	4.35	61,1	4.17	57,9
— 15	5.8	70,3	4.58	68,5	4.46	66,3
— 10	5.26	76,9	5.19	75,8	5.11	74,3
— 5	5.43	83,5	5.40	82,9	5.36	82,2
0	6.0	90,0	6.0	90,0	6 0	90,0
5	6.17	96,5	6.20	97,1	6.24	97,8
10	6.34	103,1	6.41	104,2	6.49	105,7
15	6.52	109,7	7.2	111,5	7.14	113,7
20	7.11	116,5	7.25	118,9	7.43	122,1
25	7.32	123,5	7.51	126,7	8.15	131,1
30	7.56	130,7	8.21	135,0	8.54	141,1
35	8.24	138,5	8.58	144,2	9.46	153,2
40	8.59	147,0	9.48	155,4	12.0	180,0
45	9.48	157,4	12.0	180,0		
50	12.0	180,0				

TABLE IV

Angle horaire, azimut et hauteur au moment de la plus grande digression

δ	φ = 40°			φ = 45°			φ = 50°		
	H″	A″	h″	H″	A″	h″	H″	A″	h″
40°	0h.0m	90°,0	90°,0						
45	2.12	112,6	65,4	0h.0m	90°,0	90°,0			
50	3.1	123,0	57,0	2.12	114,6	67,4	0h.0m	90°,0	90°,0
55	3.36	131,5	51,7	3.2	125,8	59,7	2.14	116,8	69,3
60	4.4	139,3	47,9	3.39	135,0	54,7	3.6	128,9	62,2
65	4.28	146,5	45,2	4.9	143,3	51,3	3.45	138,9	57,7
70	4.49	153,5	43,2	4.35	151,1	48,8	4.17	147,9	54,6
75	5.8	160,3	41,7	4.58	158,5	47,1	4.46	156,3	52,5
80	5.26	166,9	40,7	5.19	165,8	45,9	5.11	164,3	51,1
85	5.43	173,5	40,2	5.40	172,9	45,2	5.36	172,2	50,3
90	6.0	180,0	40,0	6.0	180,0	45,0	6.0	180,0	50,0

TABLE V

Angle horaire et hauteur au moment du passage au premier vertical

δ	φ = 40°		φ = 45°		φ = 50°	
	H‴	h‴	H‴	h‴	H‴	h‴
0°	6h.0m	0°,0	6h.0m	0°,0	6h.0m	0°,0
5	5.36	7,8	5.40	7,1	5.43	6,5
10	5.11	15,7	5.19	14,2	5.26	13,1
15	4.46	23,7	4.58	21,5	5.8	19,7
20	4.17	32,1	4.35	28,9	4.49	26,5
25	3.45	41,1	4.9	36,7	4.28	33,5
30	3.6	51,1	3.39	45,0	4.4	40,7
35	2.14	63,2	3.2	54,2	3.36	48,5
40	0.0	90,0	2.12	65,4	3.1	57,0
45			0.0	90,0	2.12	67,4
50					0.0	90,0

TABLE VI

Variations de l'angle horaire et de l'azimut dans l'horizon pour $h = 10'$

δ	φ = 40°		φ = 45°		φ = 50°	
	dH	dA	dH	dA	dH	dA
0°	—0m,87	— 0°,140	—0m,94	— 0°,167	— 1m,04	— 0°,199
± 10°	— 0,89	— 0,144	— 0,97	— 0,172	— 1,08	— 0,206
± 20°	— 0,97	— 0,156	— 1,08	— 0,190	— 1,22	— 0,234
± 30°	— 1,15	— 0,185	— 1,33	— 0,236	— 1,65	— 0,316

TABLE VII

Valeurs de l'angle horaire à la fin du crépuscule civil ou astronomique

δ\φ	Crépuscule civil			Crépuscule astronomique		
	40°	45°	50°	40°	45°	50°
−25°	5h.4m	4h.49m	4h.32m	6h.12m	6h.4m	5h.54m
−20	5.23	5.12	5.0	6.28	6.23	6.18
−15	5.41	5.34	5.25	6.44	6.43	6.41
−10	5.58	5.54	5.50	7.1	7.2	7.5
−5	6.15	6.14	6.14	7.17	7.22	7.29
0	6.31	6.34	6.37	7.35	7.44	7.55
5	6.49	6.55	7.2	7.54	8.7	8.24
10	7.7	7.16	7.28	8.16	8.33	8.57
15	7.26	7.40	7.57	8.40	9.4	9.39
20	7.47	8.6	8.29	9.9	9.44	10.44
25	8.11	8.36	9.9	9.47	10.46	

CHAPITRE VII

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE

Énoncé du problème. — Les rayons lumineux qui traversent l'atmosphère terrestre sont sensiblement déviés : le pouvoir réfringent de cette atmosphère est en effet sensible, quoique petit, et l'épaisseur de l'atmosphère rend son influence notable. Le problème général des *réfractions atmosphériques* est du domaine de la Physique : nous n'en traiterons ici que la partie qui intéresse l'Astronomie.

Voici les premières hypothèses qui servent de base à la théorie des *réfractions astronomiques*.

Nous supposerons que l'atmosphère est limitée, disposée autour du lieu A d'observation en couches homogènes sphériques, à l'état d'équilibre, admettant comme centre commun le point O, centre de la surface sphérique que l'on peut confondre avec la surface mathématique de la Terre aux environs de A, et situé par suite sur la verticale de A. L'indice de réfraction absolu, c'est-à-dire par rapport au vide, de ces couches successives sera de plus une fonction continue de leur rayon, et prendra la valeur 1 à la limite de l'atmosphère.

Il est facile de voir ce que ces premières hypothèses renferment d'arbitraire : il est manifeste cependant qu'elles doivent correspondre à la réalité d'une façon très approchée.

Imaginons alors un rayon lumineux se propageant dans le vide vers la Terre, et provenant d'un point S que nous regar-

derons d'abord comme infiniment éloigné : sa route est rectiligne. Mais à partir du moment où il pénètre dans l'atmosphère en B, il suit une courbe déterminée par les lois de la réfraction pour arriver en A, au lieu d'observation (*fig.* 29). Inversement, d'après le principe du retour des rayons, un rayon lumineux part de A pour aller en B, puis en S, en suivant la même route en sens inverse ; et par suite, en raison de la parfaite symétrie autour de la verticale de A qui résulte des hypothèses faites, la route de lumière ABS est entièrement située dans un plan vertical.

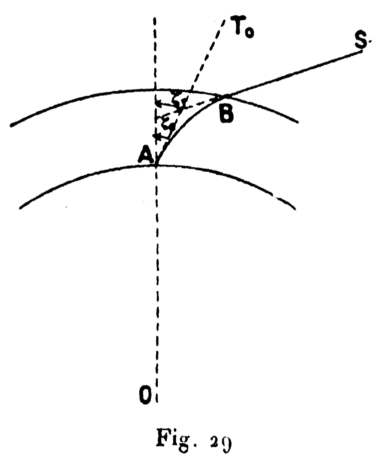


Fig. 29

En d'autres termes, *il n'y a pas de réfraction en azimut* ; les distances zénithales (ou les hauteurs) seules sont altérées par la réfraction.

Mais on ne doit pas oublier que ces conclusions ne peuvent pas être considérées comme absolument rigoureuses, puisqu'elles résultent d'hypothèses qui ne représentent la réalité que d'une façon approchée : il en sera de même pour tout ce qui suivra.

La distance zénithale *vraie* de S est l'angle ζ_1 que fait BS avec OA ; la distance zénithale *apparente* de S est l'angle ζ_0 que fait avec OA la tangente AT_0 en A à la courbe de lumière.. La *réfraction astronomique*, R, est l'angle dont tourne le rayon lumineux en allant de B en A, de sorte que

$$R = \zeta_1 - \zeta_0, \qquad \text{ou} \qquad \zeta_1 = \zeta_0 + R.$$

Si h_1 et h_0 sont les hauteurs vraie et apparente de S, on a aussi

$$h_1 = h_0 - R.$$

La réfraction est toujours positive comme nous le verrons ; donc on peut dire que *la réfraction relève les astres.*

Equation de la trajectoire lumineuse. — Si M est un point quelconque de la route de lumière, nous le définirons par ses

coordonnées polaires, savoir : la distance OM ou r, et l'angle φ que fait la verticale OA avec OM (*fig.* 30).

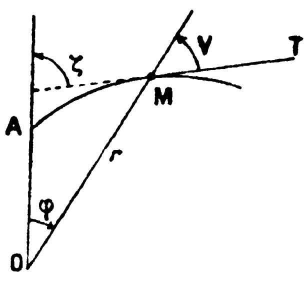


Fig. 30

Si alors V est l'angle de la tangente MT avec le rayon vecteur OM, compté comme l'indique la figure, et si ζ est la distance zénithale de la direction MT, on a toujours la relation

$$\zeta = \varphi + V.$$

D'une façon générale nous affecterons de l'indice o les diverses quantités qui se rapportent au lieu d'observation A, et de l'indice 1 celles qui se rapportent au point d'entrée B dans l'atmosphère ; dans ces conditions, la tangente en B à la trajectoire étant évidemment BS, on peut écrire

$$R = \int_c d\zeta,$$

l'intégrale affectée de la lettre c étant, comme dans ce qui suivra, une intégrale curviligne prise suivant la courbe de lumière depuis le point A jusqu'au point B.

La loi connue de la réfraction permet de trouver facilement l'équation de la trajectoire lumineuse, en regardant l'indice de réfraction de l'atmosphère au point M, soit n, comme une fonction déterminée de r.

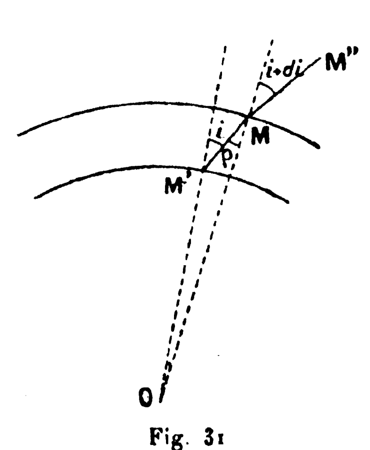


Fig. 31

Considérons à cet effet l'élément MM′ de trajectoire contenu dans la couche atmosphérique d'indice n, limitée par les sphères de centre O et de rayons r et $r + dr$; soit de plus MM″ l'élément voisin, contenu dans la couche d'indice $n + dn$; soit enfin $i + di$ l'angle d'incidence en M, i l'angle d'incidence en M′ et ρ l'angle de réfraction en M (*fig.* 31).

La loi de Descartes donne

$$(n + dn) \sin (i + di) = n \sin \rho ;$$

d'autre part dans le triangle OMM', on a

$$(r + dr) \sin \rho = r \sin i;$$

éliminant $\sin \rho$, il vient

$$(n + dn)(r + dr) \sin (i + di) = nr \sin i,$$

c'est-à-dire que l'on a la relation

$$nr \sin i = \text{Constante}.$$

L'angle i n'est d'ailleurs autre que l'angle V défini précédemment, de sorte que l'équation différentielle de la trajectoire lumineuse est finalement

$$nr \sin V = C,$$

et d'après les conditions initiales en A, on a

$$C = n_0 r_0 \sin \zeta_0.$$

Il est facile avec cette équation de trouver le sens de la concavité de la trajectoire; faisons $\frac{1}{r} = u$, de sorte que

$$Cu = n \sin V;$$

on a la relation connue

$$\operatorname{tg} V = -\frac{u}{u'},$$

en marquant par un accent la dérivée de u par rapport à l'angle polaire φ. Donc

$$C^2 u^2 = n^2 \frac{u^2}{u^2 + u'^2}, \qquad \text{ou} \qquad u^2 + u'^2 = \frac{n^2}{C^2};$$

différentiant par rapport à φ, il vient

$$u'(u + u'') = \frac{nn'}{C^2};$$

u et n sont positifs; donc, d'après une règle connue, la trajectoire tournera sa concavité vers le pôle O si le rapport $\frac{n'}{u'}$ est positif, c'est-à-dire encore si $\frac{dn}{dr}$ est négatif, ou bien si n décroît lorsque r augmente; ce sera l'inverse dans le cas contraire. Ces conclusions étaient d'ailleurs évidentes *a priori*.

Expression de R. — En différentiant l'équation de la trajectoire, il vient

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \frac{dV}{\text{tg V}} = 0;$$

remplaçant $\frac{dr}{r}$ par $\frac{d\varphi}{\text{tg V}}$, on a

$$\frac{dn}{n} + \frac{1}{\text{tg V}}(d\varphi + dV) = 0;$$

mais $\zeta = \varphi + V$; donc

$$d\zeta = -\frac{dn}{n}\,\text{tg V},$$

et l'on a pour expression de la réfraction

$$R = -\int_c \text{tg V}\,\frac{dn}{n}.$$

Or

$$\sin V = \frac{n_0 r_0 \sin \zeta_0}{nr}.$$

de sorte que

$$\text{tg V} = \frac{\frac{n_0}{n}\frac{r_0}{r}\sin\zeta_0}{\varepsilon\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin^2\zeta_0}},$$

ε ayant pour valeur ± 1, suivant que V est aigu ou obtus. Finalement on peut écrire

$$R = \int_c \frac{\frac{r_0}{r}\,d\left(\frac{n_0}{n}\right)}{\varepsilon\sqrt{\cot g^2\zeta_0 + 1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}};$$

ε aura d'abord le signe de $\cos\zeta_0$, et changera ensuite de signe lorsque le radical s'annulera, si ce fait se produit, c'est à-dire évidemment si $\cos\zeta_0$ est négatif.

Nouvelles hypothèses. — Si l'indice de réfraction n était une fonction connue de r, on pourrait sans peine calculer l'intégrale R : mais il n'en est pas ainsi. Voici d'abord les nouvelles hypothèses que nous pouvons faire légitimement.

Si ρ est la densité (ou masse spécifique) de l'air dans la couche d'indice n, nous admettrons, comme on le fait aujourd'hui, que cette densité est proportionnelle à $n - 1$, de sorte que l'on peut écrire, avec les conventions déjà faites,

$$\frac{n-1}{n_0-1} = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

De plus, nous supposerons les lois de Mariotte et de Gay-Lussac rigoureusement applicables dans toute l'étendue de l'atmosphère, de sorte que si p et t désignent la pression et la température absolue de l'air dans la couche d'indice n, on a, en faisant encore abstraction de l'humidité de l'air, la relation

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{t}{t_0}.$$

Si enfin g désigne l'intensité de la pesanteur dans la couche déjà considérée d'indice n, la condition d'équilibre de l'air s'exprime évidemment par la relation

$$dp = - g\rho dr;$$

d'ailleurs, en négligeant l'attraction insensible des couches d'air inférieures, on a

$$gr^2 = g_0 r_0^2,$$

de sorte que l'on peut écrire :

$$d\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g_0 r_0 \rho_0}{p_0}\frac{\rho}{\rho_0} d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Faisant donc

$$n_0 = 1 + \alpha, \qquad \frac{p_0}{g_0 r_0 \rho_0} = \beta, \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \omega, \qquad \frac{p}{p_0} = \chi, \qquad \frac{t}{t_0} = \theta,$$

les hypothèses précédentes sont résumées par les relations fondamentales

$$n = 1 + \alpha\omega, \qquad \chi = \omega\theta, \qquad \beta d\chi = \omega d\left(\frac{r_0}{r}\right).$$

Nous avons ainsi introduit trois fonctions nouvelles ω, χ, θ, en même temps que trois relations reliant ces fonctions à n et r. Il manque donc toujours une relation pour que le problème soit

complètement déterminé, par exemple une relation entre θ et ω, c'est-à-dire la connaissance de la loi de variation de la température de l'air en fonction de la densité. Nous laisserons d'abord cette loi indéterminée, et nous observerons seulement qu'au lieu d'observation A, on a

$$\omega_0 = \chi_0 = \theta_0 = 1.$$

Au point B, à la limite de l'atmosphère, puisqu'alors $n_1 = 1$, on a $\omega_1 = \chi_1 = 0$, d'après les relations écrites ; on a de plus $\theta_1 = 0$, car si θ tendait vers une limite non nulle quand on se rapproche de B, la formule

$$d\left(\frac{r_0}{r}\right) = \frac{\beta d\chi}{\omega} = \beta d\theta + \beta\theta \frac{d\omega}{\omega}$$

montre que $\frac{r_0}{r_1}$ ne saurait être compris entre 0 et 1, ainsi qu'il est nécessaire, puisqu'alors l'intégration ferait croître le second membre sans limite.

Développement de R en série. — Posons

$$1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = 2u,$$

et remarquons que u reste toujours voisin de zéro, car $\frac{n_0}{n}$ et $\frac{r_0}{r}$ diffèrent peu de l'unité. Si donc $\cot g^2 \zeta_0$ est notablement supérieur à la valeur maxima de $2u$, c'est-à-dire si ζ_0 n'est pas voisin de 90°, on voit que l'intégrale R peut se développer en série convergente ordonnée suivant les puissances impaires de $\operatorname{tg} \zeta_0$. On a en effet

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\cot g^2 \zeta_0 + 2u}} &= \operatorname{tg} \zeta_0 (1 + 2u \operatorname{tg}^2 \zeta_0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \operatorname{tg} \zeta_0 - u \operatorname{tg}^3 \zeta_0 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} u^2 \operatorname{tg}^5 \zeta_0 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^3 \operatorname{tg}^7 \zeta_0 + \dots ;\end{aligned}$$

et par suite on peut écrire

$$R = A \operatorname{tg} \zeta_0 - B \operatorname{tg}^3 \zeta_0 + C \operatorname{tg}^5 \zeta_0 - D \operatorname{tg}^7 \zeta_0 + \dots$$

en faisant

$$A = \int_c \frac{r_0}{r}\, d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$B = \int_c u\, \frac{r_0}{r}\, d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$C = \frac{3}{2}\int_c u^2\, \frac{r_0}{r}\, d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

$$D = \frac{5}{2}\int_c u^3\, \frac{r_0}{r}\, d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

. . . .

Pour la commodité du calcul, nous poserons $\frac{r_0}{r} = 1 - s$, de sorte que s augmente avec r, et que l'on a la relation

$$\omega ds = -\beta d\chi;$$

on a d'ailleurs $s_0 = 0$; s_1 dépend de la hauteur inconnue de l'atmosphère, mais est petit certainement. On voit que χ diminue régulièrement de 1 à 0, quand s varie de 0 à s_1; nous supposerons qu'il en est de même de θ, c'est-à-dire que la température diminue quand l'altitude augmente. Enfin nous supposerons encore qu'il en est de même de ω; la densité, et par suite aussi l'indice de réfraction de l'air, diminue donc à mesure qu'on s'élève.

D'après la valeur de r, on a

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + s\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 - \frac{s^2}{2}\left(\frac{n_0}{n}\right)^2,$$

et l'on est amené pour calculer A, B, C,..., à évaluer des intégrales de la forme

$$I = \int_c s^p \left(\frac{n_0}{n}\right)^q d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

p et q étant des entiers positifs ou nuls.

Cette intégrale a d'ailleurs tous ses éléments positifs, d'après les hypothèses faites.

Si p est nul, l'intégration est immédiate et donne

$$I = \frac{(1+\alpha)^{q+1} - 1}{q+1}.$$

Si p n'est pas nul, observons que $\frac{n_0}{n}$ reste compris entre 1 et $1+\alpha$; par suite, en remplaçant $\left(\frac{n_0}{n}\right)^q$ par 1 sous le signe $\int$, on ne commet qu'une erreur relative de l'ordre de α. Tolérant cette erreur, on peut écrire

$$I = \int_c s^p d\left(\frac{n_0}{n} - n_0\right);$$

intégrant par parties et remarquant que $s^p\left(\frac{n_0}{n} - n_0\right)$ s'annule aux deux limites, on a

$$I = -p\int_c \left(\frac{n_0}{n} - n_0\right) s^{p-1} ds;$$

remplaçons ds par $-\frac{\beta d\chi}{\omega}$, et observons que $\omega = \frac{n-1}{\alpha}$; il vient

$$I = -p\alpha\beta\int_c \frac{n_0}{n} s^{p-1} d\chi;$$

on peut encore, comme plus haut, remplacer $\frac{n_0}{n}$ sous le signe $\int$ par l'unité, et il reste, avec une erreur relative de l'ordre de α,

$$I = -p\alpha\beta\int_c s^{p-1} d\chi.$$

Si $p = 1$, on a simplement

$$I = \alpha\beta.$$

Si p est supérieur à 1, intégrons par parties comme ci-dessus ; on a

$$I = p(p-1)\alpha\beta\int_c s^{p-2}\chi ds.$$

La relation $\chi = \omega\theta$ montre que l'on a $\chi < \omega$, puisque $\theta < 1$. Donc on peut écrire

$$I < p(p-1)\alpha\beta\int_c s^{p-2}\omega ds,$$

ou bien, puisque $\omega ds = -\beta d\chi$,

$$I < -p(p-1)\alpha\beta^2 \int_c s^{p-2} d\chi.$$

Si donc $p = 2$, on a

$$I < 1.2.\alpha\beta^2.$$

Si $p > 2$, on continue de même, et finalement

$$I < 1.2.3\ldots p.\alpha\beta^p.$$

Telles sont les seules conclusions qui résultent des hypothèses faites ; elles ne peuvent être plus précises, puisque nous avons laissé une indétermination dans le problème.

Si nous les appliquons au calcul de A, B, C,... elles nous conduisent à des résultats très importants. On a immédiatement

$$A = \alpha - \alpha\beta ;$$

le premier terme est exact, et l'erreur relative sur le second est de l'ordre de α, de sorte que l'erreur relative sur A est de l'ordre de $\alpha\beta$.

Considérons maintenant B ; ce coefficient se compose d'abord d'une partie que l'on peut calculer exactement, et qui est

$$\int_c \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\right) d\left(\frac{n_0}{n}\right) = -\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{6} ;$$

puis d'une partie qui ne peut être calculée qu'approximativement, et qui est

$$\int_c (1 - s)\left(s - \frac{s^2}{2}\right) d\left(\frac{n_0}{n}\right),$$

avec une erreur relative de l'ordre de α ; la valeur de cette intégrale est $\alpha\beta$, en négligeant nécessairement les termes de l'ordre de $\alpha\beta^2$ qu'on ne connaît pas.

De la même façon, C contient d'abord une partie exacte qui est de l'ordre de α^3, et une autre partie dont on ne peut fixer qu'une limite supérieure, de l'ordre de $\alpha\beta^2$.

De même encore, D contient une partie exacte de l'ordre de

α^4, et une partie dont la limite supérieure est de l'ordre de $\alpha\beta^3$.

Et ainsi de suite.

En résumé, on peut donc écrire, et cela indépendamment de toute hypothèse sur la loi de variation de θ en fonction de ω,

$$R = \alpha(1 - \beta) \operatorname{tg} \zeta_0 - \alpha \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}^3 \zeta_0,$$

en ne commettant qu'une erreur absolue de l'ordre de $\alpha\beta^2$ sur les coefficients ; on peut même ajouter que l'erreur relative sur le coefficient de tg ζ_0 est de l'ordre de $\alpha\beta$; de plus, les coefficients inconnus de $\operatorname{tg}^5 \zeta_0$, $\operatorname{tg}^7 \zeta_0$...., sont respectivement de l'ordre de $\alpha\beta^2$, $\alpha\beta^3$,....

Ces résultats sont importants si l'on observe que α et β sont petits, β étant d'ailleurs plus grand que α, ainsi qu'on l'a implicitement supposé dans l'énoncé précédent, où l'on a négligé α^3 et $\alpha^2\beta$ devant $\alpha\beta^2$, α^4 devant $\alpha\beta^3$, etc...

Plaçons-nous en effet dans des conditions moyennes, en supposant qu'au lieu d'observation la température soit de 0° centigrade, la pression de $0^m,76$ de mercure, et la distance r_0 de 6 371 kilomètres. Prenons alors, suivant E. Mascart,

$$n_0 = 0,0002927,$$

et adoptons pour la densité du mercure 13,596, pour le poids du litre d'air $1^{gr},2932$.

On aura

$$\alpha = 0,0002927 = 60'',37.$$

$$\beta = \frac{0,76 \times 13\,596}{1,2932 \times 6\,371\,000} = \frac{1}{797} = 0,001254.$$

Par suite la formule établie ci-dessus

$$R = \alpha(1 - \beta) \operatorname{tg} \zeta_0 - \alpha \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{tg}^3 \zeta_0,$$

fournira la valeur de la réfraction à moins de 0'',1 près, tant que l'on aura $\zeta_0 < 75°$.

La valeur de α, pour les conditions de température et de pression indiquées plus haut, sera pour nous la *constante de la réfraction*.

Réfraction horizontale. — Pour étudier la réfraction dans

le cas des grandes distances zénithales, c'est-à-dire dans le voisinage de l'horizon, faisons

$$\frac{r_0}{r}\, d\left(\frac{n_0}{n}\right) = \varphi(u)du,$$

φ étant une fonction à déterminer. On a alors

$$R = \int_c \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{\cot g^2 \zeta_0 + 2u}};$$

nous appellerons u_1 la valeur inconnue de u qui correspond à la limite de l'atmosphère, et nous observerons que le radical commence par être négatif lorsque ζ_0 est supérieur à 90°.

L'ignorance où nous sommes de la vraie nature de la fonction θ, regardée comme dépendant de ω ou de s, nous permet de regarder la fonction $\varphi(u)$ comme indéterminée : au lieu de faire différentes hypothèses sur θ, nous pouvons faire différentes hypothèses sur φ.

Toutefois ces hypothèses ne peuvent être complètement arbitraires ; la définition de u et de $\varphi(u)$ permet de regarder $\frac{r_0}{r}$, $\frac{n_0}{n}$ et par suite ω comme des fonctions de u ; il faudra donc que $\frac{n_0}{n}$ varie de 1 à $1 + \alpha$ quand u varie de 0 à u_1 ; il faudra aussi que l'intégrale

$$-\int_c \omega d\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad \text{ou} \quad -\int_c \beta d\chi$$

soit égale à β. Mais ces conditions vérifiées, nous pourrons choisir $\varphi(u)$ comme nous voudrons, de façon par exemple à rendre immédiat le calcul de R ; quel que soit le choix fait, on retrouvera les résultats précédents pour les valeurs de ζ_0 inférieures à 75° ; mais la réfraction horizontale variera notablement avec ce choix.

Pour nous rapprocher le plus possible de la vérité, examinons ce qu'on peut dire de θ. Sans rappeler en détail ce que les expériences poursuivies depuis quelques années avec les ascensions aérostatiques, les ballons-sondes et les cerfs-volants ont pu nous apprendre sur la distribution des températures dans l'atmosphère, nous devons admettre que l'on peut regarder,

sans grande erreur, θ comme étant de la forme ω^f, f étant petit, 0,2 environ. Avec cette hypothèse, on a immédiatement

$$\chi = \omega^{f+1}, \quad \omega = \left(1 - \frac{s}{s_1}\right)^{\frac{1}{f}},$$

en faisant

$$s_1 = \frac{\beta(1+f)}{f}.$$

Ceci résulte de la relation

$$\omega ds = -\beta d\chi,$$

qui donne par intégration

$$s_1 - s = \beta\frac{1+f}{f}\omega^f.$$

La partie principale de u est s, et $d\left(\frac{n_0}{n}\right)$ est sensiblement proportionnel à $d\omega$; la fonction $\varphi(u)$ est donc elle-même sensiblement proportionnelle à $\frac{d\omega}{ds}$, ou encore, en confondant s avec u comme on vient de le dire, à

$$\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{\frac{1}{f}-1}$$

La présence de ce facteur rend le calcul de R peu simple; mais les couches atmosphériques qui influent le plus sur la réfraction sont les basses couches, pour lesquelles $\frac{u}{u_1}$ est petit; et, dans ce cas, on a approximativement

$$1 - \frac{u}{u_1} = e^{-\frac{u}{u_1}},$$

en désignant par e la base des logarithmes népériens. Ces réflexions nous amènent finalement à prendre la fonction $\varphi(u)$ sous la forme

$$\varphi(u) = ae^{-ku},$$

a, k, u_1 étant trois constantes à déterminer. Ce choix, qui pourrait se justifier par d'autres raisons, a l'avantage de rendre le calcul de R suffisamment simple, et de correspondre très exactement à la réalité.

Nous avons déjà indiqué deux conditions nécessaires que doit vérifier la fonction $\varphi(u)$, et qui fournissent deux relations entre les inconnues a, k, u_1. Pour trouver une troisième relation entre ces quantités, nous écrirons que l'on a bien, au lieu d'observation A, l'égalité

$$\left(\frac{d\theta}{d\omega}\right)_0 = f,$$

qui résulte de la forme ωf primitivement supposée pour θ.

De cette façon, le mode de décroissement de la température avec la densité, tel qu'il résulte du choix fait, sera conforme à l'expérience, au moins dans le voisinage du lieu d'observation.

En A, on a les relations

$$\left[d\left(\frac{n_0}{n}\right)\right]_0 = -\frac{\alpha}{1+\alpha}(d\omega)_0 = a(du)_0,$$

$$(du)_0 + \left[d\left(\frac{r_0}{r}\right)\right]_0 + \left[d\left(\frac{n_0}{n}\right)\right]_0 = 0,$$

$$\left[d\left(\frac{r_0}{r}\right)\right]_0 = \beta(d\chi)_0 = \beta(d\theta)_0 + \beta(d\omega)_0 = \beta(1+f)(d\omega)_0;$$

on en tire immédiatement

$$a = \frac{\alpha}{\beta(1+\alpha)(1+f)-\alpha}.$$

Pour trouver les deux autres relations qui lient a, k, u_1, développons en série suivant les puissances croissantes de $\operatorname{tg}\zeta_0$ l'intégrale

$$R = \int_0^{u_1} \frac{ae^{-ku}du}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\zeta_0 + 2u}},$$

et écrivons que le résultat est de la forme $A \operatorname{tg}\zeta_0 - B \operatorname{tg}^3\zeta_0 + \ldots$, A et B ayant les valeurs très suffisamment approchées calculées plus haut, $A = \alpha(1-\beta)$, $B = \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)$, qui sont indépendantes de toute hypothèse sur la fonction θ. On a ainsi

$$A = \int_0^{u_1} ae^{-ku}\,du = \frac{a}{k}(1 - e^{-ku_1}),$$

$$B = \int_0^{u_1} ae^{-ku}\,u\,du = \frac{A}{k} - \frac{a}{k}u_1 e^{-ku_1},$$

cette dernière égalité résultant immédiatement de l'intégration par parties.

Posons

$$\varepsilon = e^{-ku_1},$$

de sorte que

$$k = \frac{a}{A}(1 - \varepsilon), \qquad u_1 = -\frac{\log \varepsilon}{k},$$

le logarithme étant népérien; en appelant h la quantité $\frac{aB}{a^2}$, on trouve immédiatement pour déterminer ε, l'équation transcendante facile à résoudre,

$$\frac{1 - \varepsilon + \varepsilon \log \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} = h.$$

Il est facile maintenant de calculer R. En faisant le changement de variables

$$\frac{2x^2}{k} = \cot g^2 \zeta_0 + 2u,$$

et posant, comme on fait d'ordinaire,

$$\Psi(x) = e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx,$$

on a sans difficulté

$$R = a\sqrt{\frac{2}{k}}\left[\Psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cot g\, \zeta_0\right) - e^{-ku_1}\Psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}(\cot g^2 \zeta_0 + 2u_1)}\right)\right]$$

$$= a\sqrt{\frac{2}{k}}\left[\Psi\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \cot g\, \zeta_0\right) - \varepsilon\Psi\left(\sqrt{\frac{k}{2} \cot g^2 \zeta_0 - \log \varepsilon}\right)\right],$$

et il est visible que cette formule s'applique sans modification aux distances zénithales apparentes ζ_0 supérieures à 90°.

Les tables étendues de la fonction $\Psi(x)$ publiées par R. Radau au tome XVIII des *Annales de l'Observatoire de Paris* (mémoires) rendent facile le calcul de R sous cette forme.

La même méthode s'appliquerait sans difficulté, si l'on adoptait pour $\varphi(u)$ une fonction de la forme

$$e^{-ku}(a + bu + cu^2 + \ldots\ldots),$$

$a, b, c, \ldots$ étant des constantes que l'on peut déterminer à l'aide des dérivées successives de θ par rapport à ω au lieu d'observation ; et l'on pourrait ainsi, en augmentant le nombre des paramètres, augmenter la précision des résultats.

En prenant pour α, β les valeurs qui nous ont déjà servi, et faisant $f = 0{,}2$ afin de nous rapprocher le plus possible de la théorie de la réfraction de R. Radau, on trouve

$$\log a = 4{,}69710, \qquad \log \varepsilon = \bar{2}{,}5030, \qquad \log k = 2{,}90275,$$

a étant évalué en secondes d'arc, et les logarithmes étant décimaux. Dans ces conditions, pour $\zeta_0 = 90°$, la réfraction horizontale proprement dite est égale à $2188''$ ou $36'28''$; les tables de R. Radau donnent à cette réfraction la valeur $2208''$: la différence est insignifiante, si l'on songe à l'incertitude de la correction de réfraction dans le voisinage de l'horizon.

La théorie que nous avons exposée correspond donc d'une façon largement suffisante à la réalité, et offre l'avantage d'une grande simplicité par rapport aux théories classiques de Laplace, de Bessel, etc., qui ne sauraient trouver place dans ce Cours.

Réfraction moyenne. Tables de réfraction. — La réfraction change avec les conditions météorologiques au lieu d'observation, puisqu'elle dépend des constantes α, β, f, qui changent avec ces conditions. Pour obtenir facilement la réfraction R qui correspond à une distance zénithale apparente donnée, on construit d'abord une table des *réfractions moyennes* ou *normales*, c'est-à-dire des réfractions qui correspondent à des conditions atmosphériques moyennes ; des tables auxiliaires permettent ensuite de passer de ces réfractions moyennes aux réfractions véritables qui correspondent aux conditions atmosphériques réellement observées.

Ces tables auxiliaires remplissent leur but avec plus ou moins de précision suivant la façon dont elles sont construites. Nous nous bornerons ici à indiquer comment on peut passer des réfractions moyennes aux réfractions vraies d'une façon suffisamment approchée pour la pratique.

Quand les distances zénithales apparentes sont faibles, la

partie principale de R est $\alpha \operatorname{tg} \zeta_0$, et par suite R varie comme α; nous admettrons ce résultat comme vrai dans tous les cas : il n'est qu'approché, mais il l'est suffisamment, puisque d'une part la réfraction contient en facteur α, à cause de la différentielle $d\left(\frac{n_0}{n}\right)$ qui figure dans l'intégrale R, et que d'autre part, si l'exactitude de cette hypothèse diminue à mesure que ζ_0 grandit, il ne faut pas oublier que la réfraction est très incertaine dans le voisinage de l'horizon. Cette incertitude tient à ce que le rayon lumineux demeure alors plus longtemps dans les basses couches de l'atmosphère, pour lesquelles les hypothèses fondamentales sont souvent assez loin d'être réalisées, et par suite peut subir, et subit en effet des perturbations notables, ainsi qu'il résulte de l'expérience.

Désignons par p_0 et t_0 la pression et la température absolue de l'air au lieu d'observation dans les conditions moyennes, et par p'_0 et t'_0 les mêmes grandeurs dans des conditions quelconques; si de plus n_0 et n'_0 sont les indices de réfraction dans les deux cas, et si l'on fait $n_0 = 1 + \alpha$, $n'_0 = 1 + \alpha'$, on voit que l'on a, d'après la relation admise entre l'indice et la densité,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{p'_0}{p_0} \times \frac{t_0}{t'_0}.$$

La réfraction vraie, qui correspond aux conditions p'_0 et t'_0, sera donc égale à la réfraction moyenne multipliée par le produit des deux facteurs

$$\frac{p'_0}{p_0} \quad \text{et} \quad \frac{t_0}{t'_0}.$$

Voici comment on applique pratiquement ce résultat. Supposons que les conditions moyennes soient définies par une température T_0 en degrés centigrades, et une hauteur H_0 de la colonne barométrique mercurielle, mesurée à la même température T_0, et dans un lieu où l'accélération de la pesanteur est g_0. Au lieu d'observation, l'accélération de la pesanteur est g, la température extérieure de l'air est T (en degrés centigrades), enfin la hauteur de la colonne barométrique telle

qu'on l'observe directement est H', et la température du baromètre est T'.

Soit H la hauteur barométrique réduite à la température T de l'air, et au lieu où l'intensité de la pesanteur est g_0, de sorte que

$$H = H' \frac{g}{g_0} [1 - (m - k)(T' - T)],$$

en désignant par m le coefficient de dilatation absolue du mercure $\left(\frac{1}{5\,550}\right)$, et par k celui de l'échelle barométrique (généralement en laiton). Alors on a

$$\frac{p'_0}{p_0} = \frac{H}{H_0} [1 - (m - k)(T - T_0)].$$

De plus

$$\frac{t_0}{t'_0} = \frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T},$$

en désignant encore par δ le coefficient de dilatation de l'air, soit 0,00367.

Finalement, on a donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H}{H_0} \times \frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T} [1 - (m - k)(T - T_0)].$$

$\frac{H}{H_0}$ est le *facteur barométrique*, et l'on voit que pour l'obtenir, il faut d'abord réduire la hauteur observée H' à H ; quant à

$$\frac{1 + \delta T_0}{1 + \delta T} [1 - (m - k)(T - T_0)],$$

c'est le *facteur thermométrique ;* le dernier terme est le moins important et sera obtenu avec une approximation suffisante en faisant $m - k = \frac{1}{6\,000}$.

On passera de la réfraction moyenne à la réfraction vraie en la multipliant par les deux facteurs barométrique et thermométrique, qui en général diffèrent peu de l'unité, de sorte que les multiplications se font aisément.

La table de réfraction que l'on trouve dans la Connaissance des Temps, donne les réfractions normales pour $T_0 = 0°$ centi-

grade, $H_0 = 760^{mm}$, à la latitude de 45°, et au niveau de la mer ; elle est construite d'après la théorie de R. Radau.

Des tables auxiliaires donnent en même temps les facteurs thermométrique et barométrique pour les différentes températures et pressions que l'on rencontre d'habitude, et fournissent les moyens d'obtenir une précision supérieure lorsque la distance zénithale grandit.

Cas où l'astre est à distance finie. — Dans ce qui précède, nous avons appris à corriger de la réfraction une direction : en d'autres termes l'astre S était supposé à l'infini. Supposons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi.

Le rayon lumineux issu de S pénètre toujours en B dans l'atmosphère, et arrive au lieu d'observation A avec la distance zénithale apparente ζ_0; la distance zénithale vraie de S est alors l'angle de AS avec la verticale OAz en A, soit ζ (*fig.* 32).

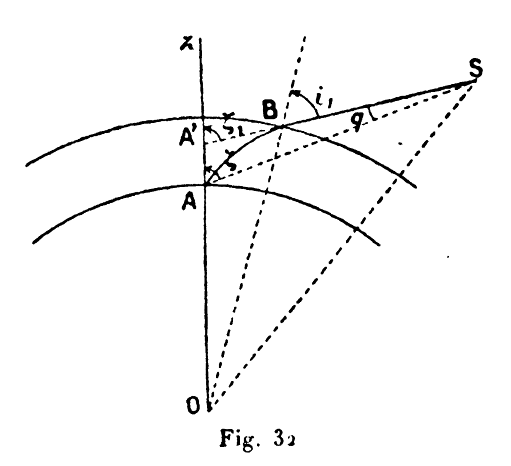


Fig. 32

Si d'autre part ζ_1 est la distance zénithale ζ_0 corrigée de la réfraction astronomique R, c'est-à-dire $\zeta_0 + R$, ζ_1 est l'angle de BS avec la verticale Oz, angle qui a son sommet en A', point de rencontre de Oz avec BS.

Si l'on appelle q l'angle à l'astre ASB, on a donc

$$\zeta = \zeta_1 - q = \zeta_0 + R - q,$$

et tout revient à évaluer l'angle q.

En conservant les notations déjà employées, soit OA $= r_0$, OB $= r_1$, et AA' $= h$; l'indice de réfraction de l'air en A est n_0, tandis qu'en B il est 1 ; enfin l'angle de OB avec BS est i_1. D'après l'équation connue de la trajectoire lumineuse AB, on a d'abord

$$r_1 \sin i_1 = n_0 r_0 \sin \zeta_0 ;$$

de plus le triangle OA′B donne

$$(r_0 + h) \sin \zeta_1 = r_1 \sin i_1 ;$$

donc

$$1 + \frac{h}{r_0} = n_0 \frac{\sin \zeta_0}{\sin \zeta_1}.$$

Cette première relation fournit h, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{h}{r_0} = \frac{n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1}{\sin \zeta_1} ;$$

il est facile de voir que le second membre est toujours très petit : en effet, si ζ_0 n'est pas voisin de 90°, on a

$$n_0 = 1 + \alpha, \quad \text{et} \quad R = \alpha \operatorname{tg} \zeta_0 ;$$

il vient par suite :

$$\sin \zeta_1 = \sin (\zeta_0 + \alpha \operatorname{tg} \zeta_0) = \sin \zeta_0 + \alpha \sin \zeta_0,$$

sensiblement, et $n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1$ est nul à ce degré d'approximation.

A la limite, si $\zeta_0 = 90°$, on a sensiblement $\frac{h}{r_0} = \alpha = 0{,}0003$ environ ; le point A′ est donc toujours très voisin de A.

Pour calculer q, faisons $OS = d$, et remarquons que pour l'astre le plus voisin de nous de beaucoup, la Lune, AS diffère peu de d. On peut alors écrire dans le triangle ASA′ où q est très petit,

$$q = \frac{h}{d} \sin \zeta_1 = \frac{r_0}{d} (n_0 \sin \zeta_0 - \sin \zeta_1).$$

Cet angle q est donc toujours négligeable, d'après ce qui précède ; il dépasse à peine en effet 1″ dans l'horizon.

Si cependant il devient nécessaire de tenir compte de cet angle, ceci ne peut arriver que dans le cas de la Lune ; et alors, d'habitude, on conserve $\zeta_1 = \zeta_0 + R$ pour la distance zénithale vraie, mais on suppose le lieu d'observasion transporté en A′ : c'est ce que l'on fait dans la théorie des éclipses de Soleil et des occultations d'étoiles par la Lune.

Pour exprimer en effet que l'on voit du point A l'astre S dans l'horizon, par exemple, il suffit d'exprimer que la distance zénithale vraie de S vu de A′ est égale à $90° + R_0$, R_0 étant la réfraction horizontale proprement dite.

Réfraction terrestre. — Pour étudier sommairement les *réfractions terrestres*, considérons le point d'observation A où, comme plus haut, les éléments qui définissent le rayon et les conditions de l'air sont ζ_0, n_0, r_0 ; un rayon lumineux issu de A suit une courbe AM, dont chaque point M est défini par ses coordonnées polaires r et φ, et pour laquelle l'angle du rayon vecteur avec la tangente en M sera désigné par ζ (*fig.* 33). L'indice de l'air en M étant n, on a donc d'après ce qu'on a déjà vu,

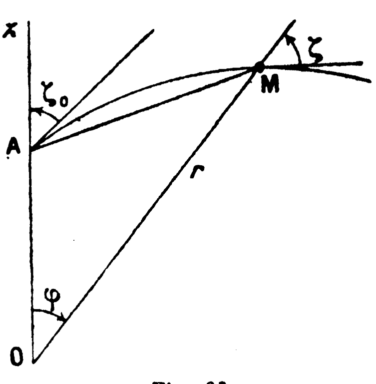


Fig. 33

$$nr \sin \zeta = n_0 r_0 \sin \zeta_0, \qquad \operatorname{tg} \zeta = r \frac{d\varphi}{dr}.$$

Si de plus ζ_1 est la distance zénithale vraie de M, c'est-à-dire l'angle de AM avec la verticale Az, nous allons développer en série r, ζ, ζ_1, suivant les puissances croissantes de l'angle φ, qui reste toujours très petit, tant que M est, comme A, un objet terrestre.

On a d'abord

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{cotg} \zeta,$$

puis

$$d\zeta \operatorname{cotg} \zeta + \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} = 0,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{d\varphi} = -1 - \operatorname{tg} \zeta \frac{dn}{nd\varphi} = -1 - \frac{rdn}{ndr} = -(1-k),$$

en faisant

$$k = -\frac{r}{n}\frac{dn}{dr}.$$

On a ensuite

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = r \operatorname{cotg}^2 \zeta + r(1-k) \operatorname{coséc}^2 \zeta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{d\varphi^2} = \frac{dk}{d\varphi} = r \operatorname{cotg} \zeta \frac{dk}{dr} = k' \operatorname{cotg} \zeta,$$

en faisant

$$k' = -\frac{r}{dr} d\left(\frac{r}{n}\frac{dn}{dr}\right);$$

et ainsi de suite.

Si donc on marque de l'indice o les valeurs de k, k',... relatives à A, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{r}{r_0} = 1 + \operatorname{cotg} \zeta_0 . \varphi + [\operatorname{cotg}^2 \zeta_0 + (1 - k_0) \operatorname{coséc}^2 \zeta_0] \frac{\varphi^2}{2} + \ldots.., \\ \zeta = \zeta_0 - (1 - k_0)\varphi + k'_0 \operatorname{cotg} \zeta_0 \frac{\varphi^2}{2} + \ldots..; \end{array}\right.$$

la convergence de ces formules est d'ailleurs augmentée par le fait que, dans le cas des réfractions terrestres, ζ_0 est voisin $\frac{\pi}{2}$, et par suite cotg ζ_0 est très petit : on peut donc se contenter de la connaissance de k_0.

On a maintenant dans le triangle OAM, par une formule élémentaire de trigonométrie rectiligne,

$$\operatorname{cotg}\left(\zeta_1 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r - r_0}{r + r_0} \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2},$$

ou bien en remplaçant r par sa valeur ci-dessus,

$$\operatorname{cotg}\left(\zeta_1 - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\operatorname{cotg} \zeta_0 . \varphi + [\operatorname{cotg}^2 \zeta_0 + (1 - k_0) \operatorname{coséc}^2 \zeta^0] \frac{\varphi^2}{2} + \ldots.}{\varphi + \operatorname{cotg} \zeta_0 . \frac{\varphi^2}{2} + \ldots..}$$

$$= \operatorname{cotg} \zeta_0 + (1 - k_0) \operatorname{coséc}^2 \zeta_0 \frac{\varphi}{2} + \ldots..;$$

de sorte que

$$\zeta_1 - \frac{\varphi}{2} = \zeta_0 - (1 - k_0) \frac{\varphi}{2} + \ldots..,$$

et finalement

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \frac{k_0}{2} \varphi + \ldots..$$

On voit ainsi que la réfraction proprement dite est sensiblement proportionnelle à φ, puisque c'est la différence $\zeta_1 - \zeta_0$.

La valeur du coefficient k_0, telle qu'elle résulte des hypothèses que nous avons faites précédemment dans l'étude de la réfraction astronomique, est facile à calculer; en gardan

toutes les notations déjà employées, on a en effet

$$k_0 = -\left(\frac{r_0}{r}\right)_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)_0 \left[\frac{d\left(\frac{n_0}{n}\right)}{d\left(\frac{r_0}{r}\right)}\right]_0 = \frac{a}{a+1} = \frac{\alpha}{\beta(1+\alpha)(1+f)},$$

d'où, dans les conditions normales, $k_0 = 0{,}1944$.

En réalité la valeur de k_0 est très incertaine et varie beaucoup avec les conditions météorologiques. Dans la pratique de la navigation, en particulier, on adopte la valeur moyenne $k_0 = 0{,}16$. Cette valeur diffère sensiblement de celle qui précède : mais il ne faut pas s'en étonner, car dans le cas des réfractions terrestres, les couches inférieures de l'atmosphère interviennent seules, tandis que pour la réfraction astronomique, c'est l'influence de l'atmosphère entière qui se fait sentir.

Dépression apparente de l'horizon. — Les formules ci-dessus permettent de résoudre tous les problèmes relatifs aux réfractions terrestres. Nous signalerons seulement les suivants.

Appelons a le rayon de la surface sphérique de la mer, h la hauteur de l'œil au-dessus du niveau de la mer, et cherchons la *dépression apparente* D de l'horizon sensible, c'est-à-dire l'angle que fait avec l'horizon vrai de l'œil, le rayon visuel tangent à la surface de la mer. Il faut faire

$$r_0 = a + h, \quad r = a, \quad \zeta = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_0 = \frac{\pi}{2} + D.$$

Comme $\frac{h}{a}$ est très petit, on peut remplacer $\frac{a}{a+h}$ par $1 - \frac{h}{a}$, et comme D est petit aussi, on a avec une approximation suffisante :

$$\frac{h}{a} = D\varphi - (1 - k_0)\frac{\varphi^2}{2} + \dots\dots,$$
$$D = (1 - k_0)\varphi + \dots\dots,$$

d'où l'on tire

$$D = \sqrt{(1 - k_0)\frac{2h}{a}}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1}{1 - k_0}\frac{2h}{a}}.$$

Si l'on exprime φ en minutes d'arc, on aura précisément de cette façon, comme l'on sait, la distance de l'horizon sensible en milles marins.

Exemple. — Faisons $k_0 = 0{,}16$, $a = 6371^{\text{km}}$, $h = 10^{\text{m}}$; on a

$$D = 5'35'', \quad \varphi = 6',6.$$

Soit encore à calculer la dépression apparente D du pied d'une côte qui borne l'horizon, connaissant φ, c'est-à-dire la distance de cette côte à l'observateur. On a les mêmes notations, sauf que ζ n'est plus égal à $\frac{\pi}{2}$, et on emploie l'unique équation

$$\frac{h}{a} = D\varphi - (1 - k_0)\frac{\varphi^2}{2} + \ldots\ldots,$$

d'où, avec une approximation suffisante,

$$D = \frac{h}{a}\frac{1}{\varphi} + (1 - k_0)\frac{\varphi}{2}$$

Exemple. — Avec les mêmes valeurs de k_0, a, h, soit $\varphi = 1'$; on a

$$D = 18'58''.$$

Lever ou coucher apparent des étoiles. — Il est clair qu'en vertu de la réfraction, une étoile apparaît dans l'horizon, lorsque sa hauteur changée de signe est en réalité égale à la réfraction horizontale proprement dite R_0, qui correspond à une hauteur apparente nulle. Nous avons vu précédemment comment on devait tenir compte de ce fait pour modifier l'angle horaire et l'azimut du lever ou du coucher.

Pour les astres rapprochés, il faut tenir compte en outre de la parallaxe, ainsi que nous le dirons plus loin.

Influence de la réfraction sur les coordonnées équatoriales. — La réfraction altère les hauteurs, mais non les azimuts; elle altère par suite les autres coordonnées, par exemple les coordonnées équatoriales, dont l'usage est le plus fréquent.

Si nous marquons d'un accent les coordonnées apparentes d'une direction, tandis que les coordonnées vraies correspon-

dantes sont indiquées par les mêmes lettres sans accent, nous aurons donc, avec les notations habituelles,

$$A' = A, \quad h' = h + R,$$

R désignant la réfraction relative à la hauteur apparente h'. Ces relations permettent de calculer rigoureusement l'angle horaire et la déclinaison apparents, H' et δ'.

Plaçons-nous dans le cas assez général où l'on peut négliger le carré de R; l'emploi des formules différentielles suffira alors, et en faisant $A' - A = dA$, $h' - h = dh$,..... on aura d'après ce qui a été vu antérieurement,

$$\begin{cases} \cos\delta \, . \, dH = -R \sin S \\ \qquad d\delta = R \cos S, \end{cases}$$

puisque $dA = 0$, $dh = R$; S désigne toujours l'angle parallactique, déterminé ainsi que h par les relations

$$\begin{cases} \cos h \sin S = \cos\varphi \sin H, \\ \cos h \cos S = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos H, \\ \qquad \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H. \end{cases}$$

On prend généralement R sous la forme k cotg h, k étant déterminé par cette relation même : ceci est avantageux, puisque, si la hauteur n'est pas très petite, k est sensiblement constant, d'après ce que nous avons dit plus haut ; en gardant les notations déjà employées, k est sensiblement égal à α.

On a alors

$$\begin{cases} \qquad dA = 0, \quad dh = k \operatorname{cotg} h, \\ \cos\delta \, . \, dH = -\dfrac{k \cos\varphi \sin H}{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H}, \\ \qquad d\delta = k \dfrac{\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos H}{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H}; \end{cases}$$

on peut évidemment poser

$$\begin{cases} \sin n \sin N = \cos\varphi \cos H, \\ \sin n \cos N = \sin\varphi, \\ \qquad \cos n = \cos\varphi \sin H, \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{cases} \cos\delta \, . \, dH = -k \dfrac{\operatorname{cotg} n}{\sin(N + \delta)}, \\ \qquad d\delta = k \operatorname{cotg}(N + \delta), \end{cases}$$

formules faciles à calculer.

Si α' et α désignent les ascensions droites apparentes et vraies, on a aussi $d\alpha + dH = 0$, puisque $\alpha + H = t$, t étant le temps sidéral.

Trajectoire apparente d'une étoile autour de sa position vraie. — Imaginons que k reste constant, et cherchons la trajectoire apparente de l'astre S autour de sa position vraie pendant le temps qu'il reste au-dessus de l'horizon, en supposant que α et δ soient constants.

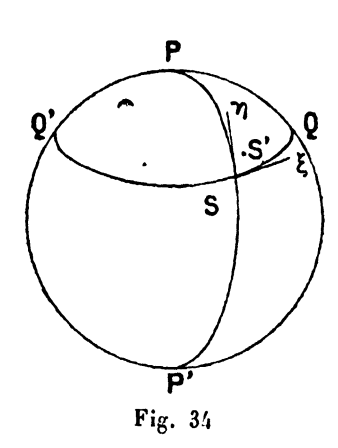


Fig. 34

Soit S le point de la sphère céleste de coordonnées α, δ; menons par S le cercle horaire PSP′ et le parallèle QSQ′; soit $S\xi$ la tangente au parallèle menée dans le sens direct, $S\eta$ la tangente au cercle horaire menée vers le pôle P (*fig.* 34). En regardant le point S′, position apparente de S, comme situé dans le plan tangent à la sphère en S, ses coordonnées par rapport aux axes $S\xi$ et $S\eta$ sont, d'après les formules (38) du Chapitre III,

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \cos\delta \,.\, d\alpha, \\ \eta &= d\delta, \end{aligned}\right.$$

et d'après le paragraphe précédent, le lieu géométrique de S′, c'est-à-dire la trajectoire apparente de S autour de sa position vraie, est défini par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{k\cos\varphi\sin H}{\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H}, \\ \eta &= k\,\frac{\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos H}{\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H}, \end{aligned}\right.$$

où H est la variable indépendante.

Si l'étoile est une circumpolaire toujours visible, c'est-à-dire si l'on a $|\varphi| + |\delta| > \frac{\pi}{2}$, avec $\varphi\delta > 0$, H doit varier de $-\pi$ à $+\pi$.

Si l'étoile a un lever et un coucher, c'est-à-dire si l'on a $|\varphi| + |\delta| < \frac{\pi}{2}$, H doit varier entre les valeurs $-H_0$ et H_0,

prises inférieures à π en valeur absolue, et déterminées par la relation

$$\cos H_0 = - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

On voit sans peine qu'en supposant k constant, le lieu géométrique du point (ξ, η) est toujours une conique admettant $S\eta$ comme axe de symétrie. Dans le premier cas, ce sera une ellipse facile à construire : les ordonnées des sommets situés sur $S\eta$ sont, pour le passage supérieur, $\eta_0 = k \operatorname{tg}(\varphi - \delta)$, et pour le passage inférieur, $\eta_1 = - k \operatorname{tg}(\varphi + \delta)$.

Dans le second cas, c'est une hyperbole dont une branche seule convient à la question, celle dont le sommet situé sur $S\eta$ a pour ordonnée η_0. Il est clair d'ailleurs que k ne peut pas être considéré comme constant lorsque l'astre est voisin de l'horizon et que ce qui précède ne correspond à la réalité que si la hauteur n'est pas très petite.

Réfraction différentielle pour les coordonnées horizontales. — Soient deux astres voisins S et S' : la réfraction les fait voir en S_1 et S_1'. Il s'agit de déterminer la position relative de S_1 et S_1', connaissant la position relative de S et S' : tel est le problème de la *réfraction différentielle*. Il suffit, pour le résoudre, d'appliquer les formules établies dans le dernier paragraphe du Chapitre III.

En supposant qu'il s'agisse des coordonnées horizontales, les coordonnées de S sont A et h, celles de S' sont $A + \Delta A$, $h + \Delta h$; la distance SS' est s, l'angle de position de S' par rapport à S est Z.

En marquant de la caractéristique d les accroissements dus à la réfraction, de sorte que pour S_1 et S_1' les quantités analogues aux précédentes sont

$$A + dA, \quad h + dh, \quad A + dA + \Delta A + d(\Delta A),$$
$$h + dh + \Delta h + d(\Delta h), \quad s + ds, \quad Z + dZ,$$

on a d'abord $dA = 0$, $dh = R$, en appelant R la réfraction qui correspond à la hauteur vraie h. R est une fonction de h seulement, et nous désignerons par $- R'$ la dérivée de cette fonction par rapport à h, de sorte que R' est une quantité positive.

Dans ces conditions, les formules rappelées donnent immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} &d(\Delta A) = 0, \qquad d(\Delta h) = -R'.\Delta h; \\ &\frac{ds}{s} = -(R \sin^2 Z \operatorname{tg} h + R' \cos^2 Z), \\ &dZ = -\sin Z \cos Z\,(R \operatorname{tg} h - R'). \end{aligned}\right.$$

Menons encore par S la tangente $S\xi$ au cercle de hauteur dans le sens rétrograde, et la tangente $S\eta$ au cercle vertical vers le pôle, et nommons ξ et η les coordonnées de S' par rapport aux axes $S\xi$, $S\eta$, dans le plan tangent à la sphère en S. Faisant la même construction en S_1, et appelant $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, ce que deviennent ξ et η, on a

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= -\xi R \operatorname{tg} h, \\ d\eta &= -\eta R'. \end{aligned}\right.$$

En faisant dans les formules précédentes $R = k \operatorname{cotg} h$, on peut considérer k comme constant tant que h n'est pas très petit, et alors $R' = \frac{k}{\sin^2 h}$, de sorte que :

$$\left\{\begin{aligned} &d(\Delta A) = 0, \qquad d(\Delta h) = -k \operatorname{cosec}^2 h \,.\, \Delta h, \\ &ds = -ks\,(1 + \cos^2 Z \operatorname{cotg}^2 h), \; dZ = k \sin Z \cos Z \operatorname{cotg}^2 h, \\ &d\xi = -k\xi, \qquad d\eta = -k\eta \operatorname{coséc}^2 h. \end{aligned}\right.$$

Déformation du Soleil et de la Lune. — Les disques circulaires du Soleil et de la Lune nous apparaissent déformés par la réfraction. Soient en effet S le centre, et S' un point du bord, défini par la distance constante SS' égale à s, et l'angle de position Z, ou encore par les coordonnées ξ, η introduites ci-dessus. Si S_1 et S_1' sont les positions apparentes de S et S', on a

$$\left\{\begin{aligned} \xi + d\xi &= \xi\,(1 - R \operatorname{tg} h), \\ \eta + d\eta &= \eta\,(1 - R'); \end{aligned}\right.$$

ceci nous montre que le lieu géométrique du point S_1', c'est-à-dire le bord apparent de l'astre, est une ellipse de centre S_1, dont le demi-grand axe est horizontal et vaut $s(1 - R \operatorname{tg} h)$,

tandis que le demi-petit axe est vertical et vaut $s(1 - R')$: R' est en effet supérieur à $R \operatorname{tg} h$.

Il y a donc *contraction* dans le sens vertical.

Si, par exemple, on prend $s = 16'$, valeur moyenne du demi-diamètre apparent du Soleil et de la Lune, et $h = 6°$, on a en gros $R = 8'$, et la variation de R pour 10′ de hauteur étant 12″, on a $R' = \frac{1}{50}$; la contraction sur le demi-diamètre vertical est donc 19″,2 environ, tandis que sur le demi-diamètre horizontal, elle n'est que de 0″,2.

En général, l'*accourcissement* du demi-diamètre correspondant à l'angle de position Z est

$$s\,(R \sin^2 Z \operatorname{tg} h + R' \cos^2 Z),$$

ou simplement $sR' \cos^2 Z$, en remarquant que $sR \operatorname{tg} h$ est toujours très petit et pratiquement négligeable. Il est facile de réduire cet accourcissement en table.

Observons enfin que, si la hauteur h est petite, la contraction réelle du demi-diamètre vertical inférieur est un peu plus grande que celle du demi-diamètre vertical supérieur, car les formules précédentes ne sont qu'approchées, et R' augmente rapidement quand la hauteur diminue en devenant très petite. Mais les perturbations de la réfraction horizontale sont telles qu'il n'y a pas lieu de chercher une plus grande précision.

Réfraction différentielle pour les coordonnées équatoriales. — En gardant les mêmes notations, supposons maintenant qu'il s'agisse des coordonnées équatoriales horaires, H et δ, l'angle de position correspondant étant désigné par P.

D'après ce qui précède, on a ici

$$\left\{\begin{aligned} dH &= -k\,\frac{\operatorname{cotg} n}{\cos\delta \sin(N+\delta)}, \\ d\delta &= k \operatorname{cotg}(N+\delta), \end{aligned}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \sin n \sin N &= \cos\varphi \cos H, \\ \sin n \cos N &= \sin\varphi, \\ \cos n &= \cos\varphi \sin H. \end{aligned}\right.$$

En nous bornant alors au cas où l'on peut regarder k comme une constante, on en tire par un calcul facile :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial H} = -\sin N, \quad \frac{\partial N}{\partial H} = -\operatorname{cotg} n \cos N,\\
&\frac{\partial(dH)}{\partial H} = -k\left(\frac{\sin N}{\cos\delta \sin(N+\delta)} + \frac{\operatorname{cotg}^2 n}{\sin^2(N+\delta)}\right),\\
&\frac{\partial(dH)}{\partial\delta} = k\,\frac{\operatorname{cotg} n \cos(N+2\delta)}{\cos^2\delta \sin^2(N+\delta)},\\
&\frac{\partial(d\delta)}{\partial H} = k\,\frac{\operatorname{cotg} n \cos N}{\sin^2(N+\delta)},\\
&\frac{\partial(d\delta)}{\partial\delta} = -\frac{k}{\sin^2(N+\delta)};
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
d(\Delta H) &= \frac{\partial(dH)}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial(dH)}{\partial\delta}\Delta\delta,\\
d(\Delta\delta) &= \frac{\partial(d\delta)}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial(d\delta)}{\partial\delta}\Delta\delta;
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
ds = &-\frac{ks}{\sin^2(N+\delta)}\Big[1 + \sin^2 P\,[\operatorname{cotg}^2 n - \cos^2(N+\delta)]\\
&- 2\sin P\cos P \operatorname{cotg} n \cos(N+\delta)\Big],\\
dP = &\frac{k}{\sin^2(N+\delta)}\Big[\frac{\operatorname{cotg} n \cos(N+2\delta)}{\cos\delta} - 2\sin^2 P \operatorname{cotg} n \cos(N+\delta)\\
&+ \sin P\cos P\,[\cos^2(N+\delta) - \operatorname{cotg}^2 n]\Big].
\end{aligned}\right.$$

Influence de la réfraction sur la direction du mouvement diurne. — La direction du mouvement diurne en S est modifiée par la réfraction. En effet, une étoile placée en S semble décrire, au lieu du parallèle de pôle P mené par S, soit SQ, une trajectoire différente S'Q', en vertu de la réfraction (*fig.* 35). La direction apparente du mouvement diurne est celle de la tangente à S'Q', dans le sens du mouvement. Il est facile de la déterminer à l'aide des formules précédentes : l'angle de position de la direction SQ est en effet $\frac{\pi}{2}$, dans le système des coordonnées horaires, d'après la définition générale que

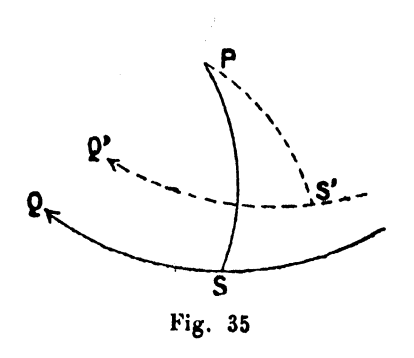


Fig. 35

nous avons donnée de cet élément; l'angle de position de la direction apparente du mouvement diurne sera donc $\frac{\pi}{2} + dP$, en calculant dP pour $P = \frac{\pi}{2}$, d'après la dernière formule écrite; c'est donc finalement

$$\frac{\pi}{2} - k \frac{\cot g\, n \cos N}{\cos \delta \sin^2 (N + \delta)}.$$

CHAPITRE VIII

—

PARALLAXE

Parallaxe. — D'après son étymologie même, la *parallaxe* est le changement que subit la direction d'un astre lorsqu'on l'observe de deux points différents, mais voisins l'un de l'autre. Les problèmes de parallaxe sont donc des problèmes de changement de coordonnées, dans lesquels l'origine des coordonnées change, tandis que les axes restent parallèles à eux-mêmes; de plus, dans ces problèmes, la distance des deux origines est petite par rapport à leur distance à l'astre. Nous avons indiqué au Chapitre III la solution complète et générale de ces questions : il ne nous reste plus, en conservant les mêmes notations générales, qu'à appliquer cette solution aux problèmes réels de l'Astronomie.

On distingue deux sortes de parallaxes, la *parallaxe annuelle*, et la *parallaxe diurne* : nous étudierons séparément les problèmes correspondants.

Parallaxe annuelle. — La distance des étoiles au Soleil et à la Terre peut toujours être regardée comme infinie par rapport aux dimensions de la Terre, mais non par rapport à la distance du Soleil à la Terre, ou, en d'autres termes, par rapport aux dimensions du système solaire.

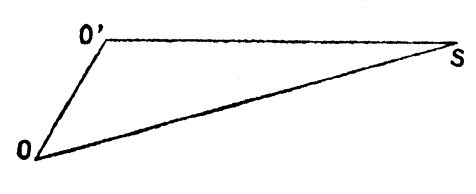


Fig. 36

Si O et O′ désignent respectivement les centres du Soleil et de la Terre, et si S est l'étoile, la *parallaxe* de cette étoile à un instant donné est l'angle OSO′ sous lequel on voit à cet instant la distance OO′ (*fig.* 36).

Le triangle OSO′ donne la relation

$$\sin \widehat{S} = \frac{OO'}{OS} \sin \widehat{O}' ;$$

par suite, si OO′ est supposé constant, égal à la distance moyenne b de la Terre au Soleil, qui sera définie d'une façon précise un peu plus loin ; si de plus la distance OS ou r de l'étoile au Soleil est aussi regardée comme constante, on voit que la parallaxe $O\widehat{S}O'$ est maxima lorsque l'angle $\widehat{O}'$ est droit. Si alors ϖ est sa valeur définie par la relation

$$\sin \varpi = \frac{b}{r},$$

ϖ est la *parallaxe annuelle* de l'étoile.

Une des plus grandes parallaxes annuelles stellaires paraît être celle de l'étoile α Centaure, égale à $0'',75$. Le rapport $\frac{b}{r}$ est donc toujours extrêmement petit, et l'on pourra toujours confondre $\sin \varpi$ avec ϖ.

Dans ce cas, qui correspond à l'étoile la plus rapprochée, on a $r = b \times 275\,000$; en désignant toujours par a le rayon équatorial de la Terre, on a d'ailleurs, comme nous le verrons bientôt, $b = a \times 23\,400$, et par suite $r = a \times 275\,000 \times 23\,400$, ce qui justifie ce que nous avons dit plus haut. Comme $a = 6\,378$ kilomètres, la distance r peut être évaluée à 41×10^{12} kilomètres, et la lumière, dont la vitesse est de 300 000 kilomètres par seconde, met $4\frac{1}{3}$ ans à parcourir cette distance.

Le problème à résoudre est ici le suivant : connaissant les coordonnées r, ψ, θ, dans un certain système, de l'étoile par rapport au Soleil O, calculer ses coordonnées ψ', θ', par rapport à la Terre O′, les nouveaux axes restant parallèles aux premiers ; et inversement.

Les formules générales du Chapitre III fournissent, avons-nous déjà dit, la solution. Toutefois nous introduirons les notations spéciales suivantes : R sera le rayon vecteur du Soleil, c'est-à-dire la distance OO′, toujours voisine de sa valeur moyenne b ; $\odot$ sera la longitude géocentrique du Soleil,

et nous négligerons la latitude géocentrique, toujours extrêmement petite, de cet astre.

Parallaxe en longitude et latitude. — Employons d'abord les coordonnées écliptiques. On doit faire

$$x_0 = \mathrm{R} \cos \odot, \quad y_0 = \mathrm{R} \sin \odot, \quad z_0 = 0;$$

remplaçant de plus $\frac{\mathrm{R}}{r}$ par $\frac{\mathrm{R}}{b} \times \frac{b}{r}$ ou $\varpi \times \frac{\mathrm{R}}{b}$, de façon à mettre en évidence la parallaxe annuelle ϖ et le rapport $\frac{\mathrm{R}}{b}$, toujours voisin de 1, les formules différentielles (18) du Chapitre III, applicables ici à cause de la petitesse de ϖ, donnent immédiatement

$$\begin{cases} \cos \beta \,.\, d\lambda = \varpi \frac{\mathrm{R}}{b} \sin(\odot - \lambda), \\ d\beta = -\varpi \frac{\mathrm{R}}{b} \sin \beta \cos(\odot - \lambda), \end{cases}$$

en désignant comme toujours par $d\lambda$ et $d\beta$ les différences $\lambda' - \lambda$ et $\beta' - \beta$.

Si $\cos \beta$ était très petit, on appliquerait la méthode de Fabritius, comme dans tous les cas semblables.

Parallaxe en ascension droite et déclinaison. — Le plus souvent, on fait usage des coordonnées équatoriales. Alors, en désignant toujours par ε l'obliquité de l'écliptique, on a évidemment

$$x_0 = \mathrm{R} \cos \odot, \quad y_0 = \mathrm{R} \sin \odot \cos \varepsilon, \quad z_0 = \mathrm{R} \sin \odot \sin \varepsilon,$$

et par suite :

$$\begin{cases} \cos \delta \,.\, d\alpha = \varpi \frac{\mathrm{R}}{b} (\cos \varepsilon \cos \alpha \sin \odot - \sin \alpha \cos \odot), \\ d\delta = \varpi \frac{\mathrm{R}}{b} (\sin \varepsilon \cos \delta \sin \odot - \sin \delta \cos \alpha \cos \odot \\ \qquad\qquad - \cos \varepsilon \sin \delta \sin \alpha \sin \odot). \end{cases}$$

Représentation géométrique. — Considérons sur la sphère céleste qui a pour centre la Terre O′, la position moyenne de l'étoile, c'est-à-dire le point S de coordonnées λ, β. En vertu

de la parallaxe, l'étoile apparaît en un point voisin S', que l'on peut regarder comme situé dans le plan tangent à la sphère en S, et que l'on définira par ses deux coordonnées rectangulaires par rapport à deux axes $S\xi$, $S\eta$: $S\xi$ est la tangente au cercle de latitude, menée dans le sens direct, et $S\eta$ est la tangente au cercle de longitude, menée vers le pôle (*fig.* 37). Dans ces conditions, on a toujours, comme nous l'avons vu au Chapitre III,

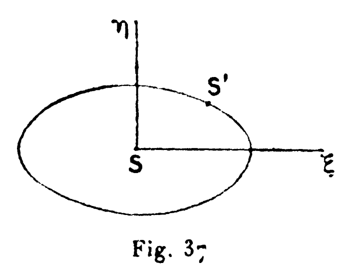


Fig. 37

$$\begin{cases} \xi = \cos\beta \,.\, d\lambda = \varpi \dfrac{R}{b} \sin(\odot - \lambda), \\ \eta = d\beta = -\varpi \dfrac{R}{b} \sin\beta \cos(\odot - \lambda). \end{cases}$$

Confondons le rapport $\frac{R}{b}$ avec l'unité, et remarquons que la longitude $\odot$ du Soleil augmente d'une façon presque uniforme de 2π en un an ; les formules précédentes montrent alors que le point S' décrit autour de sa position moyenne S une petite ellipse dont le demi-grand axe est dirigé suivant $S\xi$ et vaut ϖ, tandis que le demi-petit axe, dirigé suivant $S\eta$, vaut $\varpi \sin\beta$. La période de ce mouvement est une année, d'où le nom de parallaxe annuelle. Le sens du mouvement est direct ou rétrograde, suivant que la latitude β est positive ou négative : il suffit pour le voir de faire successivement $\odot = \lambda$, et $\odot = \lambda + \frac{\pi}{2}$.

Pour une latitude nulle, l'ellipse de parallaxe se réduit à un segment de droite double ; en un pôle de l'écliptique, elle devient un cercle.

Tous ces résultats se retrouvent sans peine par les considérations suivantes. Menons par S un vecteur SS_1 égal et parallèle au vecteur O'O (*fig.* 38) : la direction de l'étoile vue de O' est la même que celle du point S_1, vu de O. La Terre O' décrit autour du Soleil O, dans les hypothèses faites, un cercle dans le plan de l'écliptique ; donc S_1 décrit autour de S un

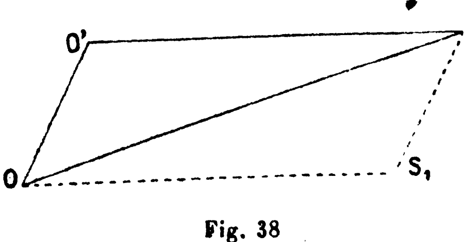


Fig. 38

cercle égal dont le plan est parallèle au plan de l'écliptique, et la droite OS_1 décrit un cône ayant pour base ce cercle ; dans le plan tangent à la sphère en S, le point S_1 décrit la section de ce cône par le plan perpendiculaire à OS passant par S, c'est-à-dire une ellipse de centre S et d'axes faciles à déterminer.

Parallaxe diurne. — Les dimensions de la Terre ne sont pas négligeables par rapport à celles du système solaire : les observations d'un astre appartenant à ce système changent donc avec le lieu d'observation, et pour les rendre comparables entre elles, il faut les rapporter au centre de la Terre, c'est-à-dire les corriger de la parallaxe diurne.

Conservant les notations générales du Chapitre III, soit O le centre de la Terre, O′ le lieu d'observation, S l'astre. La *parallaxe* à un instant donné, et pour le lieu donné O′, est l'angle OSO′ sous lequel on voit à cet instant le rayon de la Terre OO′ (*fig*. 39).

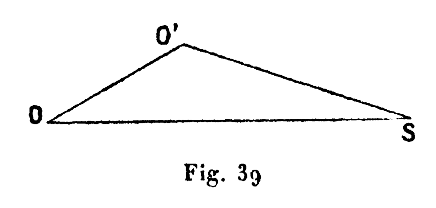


Fig. 39

La distance géocentrique OS de l'astre est r ; désignons de plus, comme nous l'avons déjà fait, par $a\rho$ le rayon de la Terre en O′, a étant le rayon équatorial. On a la relation

$$\sin \hat{S} = \frac{a\rho}{r} \sin O\hat{O}'S.$$

Pour une valeur de r donnée, et en un même point O′, la parallaxe est donc maxima lorsque l'angle OO′S est droit, c'est-à-dire quand l'astre est dans l'horizon du point O′, non pas dans l'horizon proprement dit, mais dans l'horizon perpendiculaire à la verticale géocentrique. Si alors ϖ' est sa valeur, on a

$$\sin \varpi' = \frac{a\rho}{r},$$

et ϖ' est la *parallaxe horizontale* de l'astre pour le lieu O′.

Si maintenant O′ change, le maximum de ϖ' a lieu pour $\rho = 1$, c'est-à-dire pour un point situé dans l'équateur, et si ϖ

est cette valeur maxima, on a

$$\sin \varpi = \frac{a}{r};$$

ϖ est la *parallaxe horizontale équatoriale* de l'astre S pour la distance r : la connaissance de ϖ est équivalente à celle de r. C'est la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, du Soleil et des planètes que l'on trouve dans les éphémérides.

La plus grande parallaxe est celle de la Lune ; sa valeur moyenne est de 57′, et elle varie entre 53′ et 62′. On ne peut donc, dans ce cas, confondre ϖ avec $\sin \varpi$, du moins dans les calculs de précision.

La parallaxe moyenne du Soleil a été fixée par la *Conférence internationale des étoiles fondamentales* réunie à Paris en 1896, à 8″,80 : elle varie entre 8″,95 et 8″,65, en vertu de l'excentricité de l'orbite solaire. Nous désignerons par ϖ_0 cette valeur moyenne de la parallaxe horizontale équatoriale du Soleil, et nous pourrons toujours remplacer $\sin \varpi_0$ par ϖ_0.

D'après les beaux travaux de M. A. Hinks sur les observations de la petite planète (433) *Eros* pendant l'opposition particulièrement favorable de 1900-1901, la valeur 8″,80 de la parallaxe solaire doit être légèrement augmentée, et portée à 8″,806, avec une incertitude de 0″,004 en plus ou en moins : nous continuerons cependant, dans les applications numériques, à user de la valeur 8″,80, adoptée jusqu'à nouvel ordre par les recueils d'éphémérides.

La parallaxe ϖ des planètes, et en général des comètes, ne dépasse pas 30″, et l'on peut confondre alors ϖ avec $\sin \varpi$. Le plus souvent, on exprime ϖ, ou $\frac{a}{r}$, sous la forme $\frac{b\varpi_0}{r}$: les éphémérides fournissent directement en effet la valeur de la distance géocentrique r, exprimée en prenant b comme unité, c'est-à-dire le rapport $\frac{r}{b}$.

Le problème à résoudre est ici le suivant : connaissant les coordonnées r, ψ, θ, dans un certain système, de l'astre par rapport au centre de la Terre O, calculer ses coordonnées r', ψ', θ' par rapport à un point O′ de la Terre, les nouveaux axes

restant parallèles aux premiers; inversement, on doit aussi calculer ψ, θ connaissant ψ', θ', r.

Le point O' de la Terre est défini par le rayon terrestre OO' égal à $a\rho$, et par sa latitude géocentrique : ces quantités sont toujours faciles à calculer en fonction de la latitude géographique φ, et de l'altitude s'il y a lieu, comme nous l'avons vu antérieurement.

D'une façon générale, d'après ce qui précède, il faudra dans le cas de la Lune appliquer les formules rigoureuses; pour les autres astres, les formules différentielles suffiront.

Parallaxe en azimut et en hauteur. — Comme nous avons désigné précédemment par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de l'origine O par rapport aux axes d'origine O', on peut prendre ici, pour appliquer les formules du Chapitre III,

$$r_0 = -a\rho, \qquad A_0 = 0, \qquad h_0 = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \varphi');$$

nous sommes dans le cas exceptionnel, prévu antérieurement, où l'on choisit le rayon vecteur négatif, et où la hauteur peut être supérieure à $\frac{\pi}{2}$ (si φ est négatif).

En remplaçant r par $\frac{a}{\sin\varpi}$, les formules rigoureuses sont

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\Delta A &= \frac{\rho \sin\varpi \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\cos h - \rho \sin\varpi \sin(\varphi - \varphi') \cos A},\\ \operatorname{cotg}\gamma &= \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') \frac{\cos(A + \frac{1}{2}\Delta A)}{\cos\frac{1}{2}\Delta A},\\ \operatorname{tg}\Delta h &= \frac{-\rho \sin\varpi \cos(\varphi - \varphi') \sin(\gamma - h)}{\sin\gamma - \rho \sin\varpi \cos(\varphi - \varphi') \cos(\gamma - h)};\end{aligned}\right.$$

de plus, en faisant $r' = \frac{a}{\sin\varpi'}$, on a

$$\frac{\sin\varpi'}{\sin\varpi} = \frac{\sin(\gamma - h')}{\sin(\gamma - h)},$$

ou bien

$$\Delta\left(\frac{1}{\sin\varpi}\right) = -\rho\cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(\gamma - h - \frac{1}{2}\Delta h)}{\sin\gamma \cos\frac{1}{2}\Delta h}.$$

La petitesse de $\varphi - \varphi'$, qui ne dépasse pas 12′ en valeur absolue, permet en général de simplifier le calcul. ΔA est de l'ordre du produit de ϖ par $\varphi - \varphi'$, et l'on a d'une façon très suffisamment exacte

$$\Delta A = \frac{\rho \sin \varpi \sin A}{\cos h} (\varphi - \varphi');$$

l'angle γ peut être choisi voisin de $\frac{\pi}{2}$: il n'en diffère que d'une quantité de l'ordre de $\varphi - \varphi'$, et il suffit d'écrire

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Enfin, $\sin \gamma$ et $\cos(\varphi - \varphi')$ peuvent être remplacés par l'unité, de sorte que

$$\operatorname{tg} \Delta h = \frac{-\rho \sin \varpi \sin(\gamma - h)}{1 - \rho \sin \varpi \cos(\gamma - h)},$$

et

$$\Delta\left(\frac{1}{\sin \varpi}\right) = -\rho \frac{\cos\left(\gamma - h - \frac{1}{2}\Delta h\right)}{\cos \frac{1}{2}\Delta h}.$$

La parallaxe en azimut est donc toujours très petite, et s'annulerait si la Terre était sphérique. Elle est rigoureusement nulle quand l'astre est au méridien.

Pour les astres autres que la Lune, on aura simplement par les formules différentielles, et en profitant de la petitesse de $\varphi - \varphi'$:

$$dA = 0, \qquad dh = -\rho\varpi_0 \frac{b}{r} \cos h, \qquad \frac{dr}{r} = -\rho\varpi_0 \frac{b}{r} \sin h.$$

Ces derniers résultats s'obtiendraient immédiatement par la considération du triangle OSO′, dont on peut supposer le plan vertical. La quantité $-dh$ est alors l'angle en S : on l'appelle *parallaxe de hauteur*. On la réduit en tables en prenant pour arguments la hauteur h et la parallaxe horizontale $\rho\varpi_0 \frac{b}{r}$ au lieu considéré.

Dans le problème inverse, il faut calculer A, h et ϖ' connaissant A′, h' et ϖ ; ce problème ne se présente que pour la Lune, puisque dans les formules différentielles on peut remplacer h par h'. Les formules (17) du Chapitre III, où l'on

échange les lettres accentuées et non accentuées, et où l'on change par suite le signe de r_0, qui devient ici $+a\rho$, donnent, en tenant compte comme plus haut de la petitesse de $\varphi - \varphi'$,

$$\left\{\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} - (\varphi - \varphi')\cos A', \\ \sin(h - h') &= \rho \sin \varpi \sin(\gamma - h'), \\ A - A' &= -\frac{\rho \sin \varpi \sin A'}{\cos h}(\varphi - \varphi'); \end{aligned}\right.$$

les formules relatives à ϖ' sont les mêmes que ci-dessus.

Exemple. — A une certaine époque, les coordonnées géocentriques pour l'horizon de Paris du centre de la Lune sont

$$A = 68°53'48'',1, \quad h = 43°54'24'',1, \quad \varpi = 59'34'',88.$$

Quels seront l'azimut et la hauteur, en prenant la latitude φ égale à $48°50'$?

Pour cette valeur de la latitude, on a, comme nous l'avons déjà vu,

$$\varphi' = 48°38'30'',25, \quad \log \rho = \bar{1},99917;$$

on trouve alors successivement :

$$\Delta A = 15'',5, \quad \gamma = 89°55'51'',6, \quad \Delta h = -43'18'',7,$$

et finalement

$$A' = 68°54'3'',6, \quad h' = 43°11'5'',4, \quad \varpi' = 60'18'',05.$$

Inversement, en partant de ces valeurs, on retrouve A et h.

Parallaxe en ascension droite et en déclinaison. — Ici nous devons prendre

$$r_0 = -a\rho, \quad \alpha_0 = t, \quad \delta_0 = \varphi',$$

en désignant par t le temps sidéral local ; car l'ascension droite et la déclinaison de la verticale géocentrique sont t et φ'.

Par suite, les formules rigoureuses seront

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta\alpha &= \frac{-\rho \sin \varpi \cos \varphi' \operatorname{séc} \delta \sin(t - \alpha)}{1 - \rho \sin \varpi \cos \varphi' \operatorname{séc} \delta \cos(t - \alpha)}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{1}{2}\Delta\alpha}{\cos\left(t - \alpha - \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}, \\ \operatorname{tg} \Delta\delta &= \frac{-\rho \sin \varpi \sin \varphi' \operatorname{coséc} \gamma \sin(\gamma - \delta)}{1 - \rho \sin \varpi \sin \varphi' \operatorname{coséc} \gamma \cos(\gamma - \delta)}; \end{aligned}\right.$$

de plus

$$\frac{\sin \varpi'}{\sin \varpi} = \frac{\sin(\gamma - \delta')}{\sin(\gamma - \delta)},$$

ou

$$\Delta\left(\frac{1}{\sin \varpi}\right) = -\rho \sin \varphi' \operatorname{cos\acute{e}c} \gamma \frac{\cos\left(\gamma - \delta - \frac{1}{2}\Delta\delta\right)}{\cos \frac{1}{2}\Delta\delta}.$$

La parallaxe en ascension droite est toujours nulle quand l'astre est au méridien.

Si l'on veut introduire les angles horaires, on remplacera $t - \alpha$ par H et $\Delta\alpha$ par $-\Delta H$.

Pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire calculer α, δ et ϖ' connaissant α', δ', ϖ, on appliquera les formules (17) du Chapitre III, où l'on échangera les lettres accentuées et non accentuées, de sorte que r_0 devra être pris égal à $+ a\rho$. On aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \sin(\alpha - \alpha') &= \frac{\rho \sin \varpi \cos \varphi' \sin(t - \alpha')}{\cos \delta}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')}{\cos\left(t - \alpha' - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')\right)}, \\ \sin(\delta - \delta') &= \frac{\rho \sin \varpi \sin \varphi' \sin(\gamma - \delta')}{\sin \gamma}, \end{aligned}\right.$$

et ces équations seront résolues par approximations successives, comme il a été indiqué ; les formules relatives à ϖ' sont les mêmes que ci-dessus.

Exemple — A la même date que ci-dessus, l'ascension droite et la déclinaison géocentriques du centre de la Lune sont

$$\alpha = 9^h 20^m 33^s{,}01, \qquad \delta = 20^\circ 34' 0''{,}8 ;$$

de plus, la parallaxe horizontale équatoriale est

$$\varpi = 59' 34''{,}88.$$

Quelles seront l'ascension droite et la déclinaison pour Paris, en prenant la latitude φ égale à $48^\circ 50'$, et sachant que le temps sidéral local est $12^h 24^m 4^s{,}69$?

On trouve successivement, en partant des valeurs de ρ et φ déjà indiquées,

$$\Delta\alpha = -30'23'',2 \qquad \gamma = 58^\circ 36' 56'',3, \qquad \Delta\delta = -32'36',8,$$

de sorte que finalement

$$\alpha' = 9^h 18^m 31^s,46, \qquad \delta' = 20^\circ 1' 24'',0\,;$$

on a de plus $\varpi' = 60' 18'',06$.

Inversement, en partant de ces résultats, on retrouve les valeurs données pour α et δ.

Quant aux formules différentielles, applicables aux planètes et aux comètes, qu'il s'agisse du problème direct aussi bien que du problème inverse, elles sont ici

$$\left\{\begin{aligned} d\alpha &= -\rho\varpi_0 \frac{b}{r} \cos\varphi' \operatorname{séc}\delta \sin(t-\alpha), \\ \operatorname{tg}\gamma &= \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{séc}(t-\alpha), \\ d\delta &= -\rho\varpi_0 \frac{b}{r} \sin\varphi' \frac{\sin(\gamma-\delta)}{\sin\gamma}, \\ \frac{dr}{r} &= -\rho\varpi_0 \frac{b}{r} \sin\varphi' \frac{\cos(\gamma-\delta)}{\sin\gamma} \end{aligned}\right.$$

Si l'on veut éviter l'angle auxiliaire γ, on a directement

$$\left\{\begin{aligned} d\delta &= -\rho\varpi_0 \frac{b}{r}[\sin\varphi'\cos\delta - \cos\varphi'\sin\delta\cos(t-\alpha)], \\ \frac{dr}{r} &= -\rho\varpi_0 \frac{b}{r}[\sin\varphi'\sin\delta + \cos\varphi'\cos\delta\cos(t-\alpha)]. \end{aligned}\right.$$

Les facteurs de $\frac{b}{r}$ dans les expressions de $d\alpha$ et de $d\delta$ sont, changés de signe, les *facteurs de la parallaxe* en ascension droite et en déclinaison ; on exprime le premier en secondes de temps, le deuxième en secondes d'arc, de sorte que leurs valeurs, telles qu'on les publie toujours en même temps que les observations, sont en faisant $\varpi_0 = 8'',80$,

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \frac{1}{15}\rho\varpi_0 \cos\varphi' \operatorname{séc}\delta \sin(t-\alpha), \\ P_\delta &= \rho\varpi_0 \sin\varphi' \sin(\gamma-\delta) \operatorname{coséc}\gamma \\ &= \rho\varpi_0 \sin\varphi'\cos\delta - \rho\varpi_0\cos\varphi'\sin\delta\cos(t-\alpha)\,; \end{aligned}$$

on a alors, en secondes de temps,

$$\alpha - \alpha' = \frac{b}{r} P_\alpha.$$

et en secondes d'arc

$$\delta - \delta' = \frac{b}{r} P_\delta.$$

Les coefficients tg φ', $\rho\varpi_0 \sin \varphi'$, $\rho\varpi_0 \cos \varphi'$ qui sont ainsi nécessaires pour le calcul de la parallaxe, sont réduits en tables, en prenant pour argument la latitude géographique φ, dans la Connaissance des temps.

Exemple. — En supposant comme ci-dessus

$$\alpha = 9^h 20^m 33^s,01, \qquad \delta = 20^\circ 34' 0'',8,$$
$$\varphi = 48^\circ 50', \qquad t = 12^h 24^m 4^s,69,$$

on trouve pour les facteurs de la parallaxe :

$$\log P_\alpha = \bar{1},4723, \qquad \log P_\delta = 0,6769$$

Si l'on veut avoir, et ceci n'arrive que rarement, la parallaxe en longitude et latitude, on appliquera les formules générales en calculant d'abord λ_0 et β_0, longitude et latitude de la verticale géocentrique, en fonction de son ascension droite et de sa déclinaison, α_0 et δ_0.

Représentation géométrique. — Envisageons sur la sphère céleste qui a pour centre le lieu d'observation O', la position moyenne de l'astre, c'est-à-dire le point S de coordonnées α, δ. En vertu de la parallaxe, le point S apparaît en un point voisin S', que l'on peut regarder comme situé dans le plan tangent à la sphère en S, et que l'on définira par ses deux coordonnées rectangulaires par rapport aux deux axes Sξ, Sη, dont le premier est tangent au cercle de déclinaison et dirigé dans le sens direct, tandis que le second est tangent au cercle horaire, et dirigé vers le pôle. Dans ces conditions, on a toujours, en négligeant le carré de la parallaxe ϖ, égale à $\frac{b\varpi_0}{r}$,

$$\begin{cases} \xi = \cos \delta . d\alpha = - \rho\varpi \cos \varphi' \sin (t - \alpha), \\ \eta = d\delta = - \rho\varpi [\sin \varphi' \cos \delta - \cos \varphi' \sin \delta \cos (t - \alpha)]. \end{cases}$$

On voit par là que, α et δ restant fixes, le point S' décrit autour de sa position moyenne une petite ellipse, dont le demi-grand axe est parallèle à $S\xi$ et a pour valeur $\rho\varpi \cos \varphi'$, tandis que le demi-petit axe, dirigé suivant $S\eta$, est égal à $\rho\varpi \cos \varphi' \sin \delta$: le centre de cette ellipse n'est pas en S, et la période du mouvement est le jour sidéral, d'où le nom de parallaxe diurne. Ces résultats s'expliquent sans peine immédiatement comme quand il s'agit de la parallaxe annuelle, en remarquant que O' décrit en un jour sidéral un petit cercle sur une sphère de centre O.

Lever ou coucher apparent des astres rapprochés. — La réfraction relève les astres, tandis que, d'après les formules obtenues ci-dessus, la parallaxe les rabaisse par rapport à leurs positions géocentriques. Considérons alors un astre ayant une parallaxe, et cherchons les circonstances de son lever ou coucher apparent en un lieu donné : la hauteur locale vraie est $-R_0$, en appelant toujours R_0 la réfraction horizontale; et par suite la hauteur géocentrique a pour valeur approchée $\varpi - R_0$, si ϖ est la parallaxe horizontale équatoriale. Ce résultat, évident géométriquement, est toujours suffisamment exact, même dans le cas de la Lune, car, ainsi que nous l'avons déjà dit, on ne peut pas prétendre à une grande précision dans la résolution du problème proposé, à cause de l'incertitude de la réfraction horizontale, qui varie notablement avec les conditions météorologiques, impossibles à prévoir à l'avance.

Pour cette même raison, on peut toujours négliger ϖ devant R_0, sauf dans le cas de la Lune.

Nous avons indiqué, à la fin du Chapitre VI, la méthode à suivre pour déterminer, d'après ce qui précède, les circonstances du lever ou du coucher apparent des planètes, du Soleil ou de la Lune, qu'il s'agisse du centre ou du bord supérieur de ces deux derniers astres.

Déformation de la Lune par la parallaxe. — La réfraction contracte les astres au voisinage de l'horizon : la parallaxe au contraire les dilate vers le zénith, comme nous allons le voir.

Négligeons l'aplatissement terrestre, et soit ϖ la parallaxe horizontale d'un astre; les corrections d'azimut et de hauteur correspondantes sont $dA = 0$, $dh = -\varpi \cos h$, en négligeant aussi le carré de ϖ.

Soient alors deux astres voisins S et S', de même parallaxe ϖ, et supposons S' défini par rapport à S comme dans le Chapitre précédent, soit par les différences d'azimut et de hauteur ΔA et Δh, soit par la distance s et l'angle de position Z. On a ici, d'après les formules générales du Chapitre III,

$$d(\Delta A) = 0, \qquad d(\Delta h) = \varpi \sin h . \Delta h,$$
$$ds = s\varpi \sin h, \qquad dZ = 0.$$

L'angle de position n'est donc pas altéré par la parallaxe, tandis que la distance augmente, de la même façon dans tous les sens, et d'autant plus que la hauteur est plus grande.

Un astre à apparence circulaire gardera donc encore cette forme en vertu de la parallaxe, mais paraîtra dilaté. Toutefois, la Lune est le seul astre pour lequel cet effet soit sensible : en faisant $s = 16'$, $\varpi = 57'$, on voit que l'accroissement moyen du demi-diamètre lunaire au zénith est de $15'',9$, et par suite est loin d'être négligeable.

On peut obtenir ce résultat plus directement. En supposant la Lune sphérique, elle est vue d'un point quelconque sous la forme circulaire; si s et s' désignent son demi-diamètre apparent aux distances r et r', et si l'on appelle k son rayon linéaire, on a évidemment

$$k = r \sin s = r' \sin s',$$

de même qu'en gardant les notations précédemment introduites,

$$a = r \sin \varpi = r' \sin \varpi';$$

par suite, d'une facon rigoureuse,

$$\frac{\sin s'}{\sin s} = \frac{\sin \varpi'}{\sin \varpi}.$$

En se contentant de formules différentielles, on a donc, en raison de la petitesse de s et des résultats déjà obtenus,

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dr}{r} = \varpi \sin h,$$

comme ci-dessus.

Réduction de l'observation des bords d'un astre. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que, quand il s'agissait d'un astre à diamètre apparent, on en pouvait observer le centre. Ceci n'est jamais possible; on est cependant ramené à ce cas théorique en observant deux bords parallèles (verticaux et horizontaux, par exemple, s'il s'agit de coordonnées horizontales), et prenant la moyenne des observations, en tenant compte des corrections nécessaires, toujours très petites.

Mais ce procédé ne peut s'appliquer à la Lune, dont on ne peut jamais observer qu'un seul bord parallèle à une direction donnée. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème suivant, un peu moins simple que les problèmes de parallaxe ordinaires, mais qui nous est imposé par les circonstances.

Dans le lieu O′, on observe un astre S, à apparence circulaire, la Lune par exemple, pour préciser, et pour cela on détermine la hauteur apparente (corrigée de la réfraction) h'' de l'un des bords horizontaux, et l'azimut apparent A'' de l'un des bords verticaux. En d'autres termes, si Z est le zénith, on observe la hauteur de l'un des points B, B′ où l'arc ZS coupe la circonférence du disque lunaire, et l'azimut de l'un des points A, A′, tels que les arcs ZA, ZA′ soient tangents à cette même circonférence (*fig.* 40).

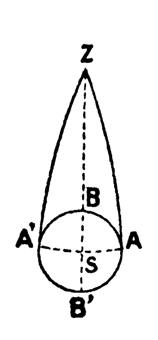


Fig. 40

Soit alors s' le demi-diamètre apparent local vrai de la Lune, c'est-à-dire son demi-diamètre apparent tel qu'on le voit, mais corrigé de la réfraction. La hauteur locale vraie du centre S de la Lune est

$$(1)\qquad h' = h'' + \varepsilon s',$$

ε désignant ± 1 suivant que l'on a observé le bord inférieur ou le bord supérieur; de même, en appelant η une quantité analogue à ε, l'azimut local vrai de S est, suivant le bord observé,

$$(2)\qquad A' = A'' + \eta \arcsin \frac{\sin s'}{\cos h'},$$

comme le montre le triangle rectangle ZAS.

Appelons maintenant r et r' les distances OS et O′S, ϖ la

parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, s son demi-diamètre apparent géocentrique : ces deux dernières données sont fournies directement par les éphémérides pour le moment de l'observation.

D'après ce qui précède, on a la relation

$$(3)\qquad \frac{\sin s}{\sin \varpi} = \frac{\sin s'}{\sin \varpi'},$$

en appelant, comme nous l'avons déjà fait, $\sin \varpi'$ le rapport $\frac{a}{r'}$.

Enfin, soient h et A la hauteur et l'azimut géocentriques du centre de la Lune pour l'horizon du lieu O'; et désignons par $a\rho$ la distance OO', par h_0 et A_0 la hauteur et l'azimut de la verticale géocentrique de O', sans remplacer pour l'instant ces quantités par leurs valeurs, afin d'avoir une solution générale facile à transposer dans un système de coordonnées quelconques. On a les équations connues

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{coséc}\,\varpi' \cos h' \cos A' &= \text{coséc}\,\varpi \cos h \cos A - \rho \cos h_0 \cos A_0, \\ \text{coséc}\,\varpi' \cos h' \sin A' &= \text{coséc}\,\varpi \cos h \sin A - \rho \cos h_0 \sin A_0, \\ \text{coséc}\,\varpi' \sin h' &= \text{coséc}\,\varpi \sin h - \rho \sin h_0, \end{aligned}\right.$$

qui achèvent avec (1), (2), (3) le système reliant les quantités h'' A'', h', A', h, A, ϖ', s', ϖ, s.

Si l'on donne h et A, le problème se résout comme précédemment en calculant d'abord h', A', ϖ' : mais notre hypothèse est que l'on donne h'', A'', et il s'agit d'avoir h, A, et subsidiairement h', A', s'. On obtient la solution rigoureuse de cette question en procédant de la façon suivante : multipliant les deux premières équations (4) respectivement par $-\sin A''$ et $\cos A''$, puis ajoutant, il vient en tenant compte de (2) et (3),

$$(5)\qquad \sin(A - A'') = \frac{\eta \sin s + \rho \sin \varpi \cos h_0 \sin(A_0 - A'')}{\cos h},$$

et l'on a aussi, comme dans la théorie générale,

$$(6)\qquad \sin(A - A') = \frac{\rho \sin \varpi \cos h_0 \sin(A_0 - A')}{\cos h},$$

en même temps que

$$(7)\qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} h_0 \cos \frac{1}{2}(A - A')}{\cos\left(A_0 - \frac{A' + A}{2}\right)}.$$

Adjoignons maintenant à la troisième équation (4) la relation

$$\operatorname{coséc}\varpi'\cos h' = \operatorname{coséc}\varpi\cos h - \rho\sin h_0\operatorname{cotg}\gamma,$$

qui n'est autre que l'équation générale (7) du Chapitre III; multipliant alors cette relation par $-\sin h'$, la troisième équation (4) par $\cos h''$, et ajoutant, on a, en tenant compte de (1) et (3),

$$(8) \qquad \sin(h - h'') = \varepsilon\sin s + \frac{\rho\sin\varpi\sin h_0\sin(\gamma - h'')}{\sin\gamma}.$$

Les formules (5), (6), (7), (8), suffisent pour déterminer, à l'aide d'approximations successives très rapidement convergentes, les inconnues h, A et les deux quantités auxiliaires A', γ.

Si l'on veut avoir de plus h' et s', on pourra se servir des formules de la théorie générale

$$\operatorname{tg}(h' - h) = \frac{-\rho\sin\varpi\sin h_0\sin(\gamma - h)}{\sin\gamma - \rho\sin\varpi\sin h_0\cos(\gamma - h)},$$

$$\frac{\sin s'}{\sin s} = \frac{\sin(\gamma - h')}{\sin(\gamma - h)},$$

et les équations (1), (2) devront se trouver vérifiées.

Quand il s'agit effectivement des coordonnées horizontales (ce que la théorie précédente ne suppose que par le langage), le calcul se simplifie notablement, en raison de la petitesse de $\varphi - \varphi'$. Il suffit de prendre

$$\gamma = 90^\circ - (\varphi - \varphi')\cos\left(A'' + \frac{\eta s}{\cos(h'' + \varepsilon s + \varpi\cos h'')}\right),$$

et de remplacer dans les autres formules A_0 par zéro, $\cos h_0$ par $\varphi - \varphi'$, $\sin h_0$ et $\sin\gamma$ par l'unité.

Si l'on applique ce que nous venons de dire au cas du Soleil remplaçant la Lune, la parallaxe est assez petite pour qu'on puisse faire, sans erreur sensible,

$$h = h'' + \varepsilon s + \rho\varpi\cos h'', \qquad A = A'' + \eta\operatorname{arc\,sin}\frac{\sin s}{\cos h}.$$

CHAPITRE IX

ABERRATION

Énoncé du problème. — La direction dans laquelle on aperçoit un astre à un instant donné, une fois corrigée de la réfraction (et nous supposerons toujours qu'il en est ainsi), n'est pas encore la direction de la droite qui joint l'œil à l'astre à ce même instant, car la propagation de la lumière n'est pas instantanée. Il faut étudier les conséquences de ce fait, c'est-à-dire les phénomènes d'*aberration*.

Soit S_0 la position au temps t_0 d'une source lumineuse S ; cette source émet des ondes qui se propagent, et tout se passe comme si le rayon lumineux était rectiligne (*fig.* 41). On observe S avec une lunette, ou d'une façon plus générale à l'aide d'un instrument possédant une ligne de visée déterminée par deux points A et B ; l'observation consiste à placer l'astre tel qu'on le voit sur le prolongement de AB, et la direction AB est alors la direction *apparente* de l'astre, au moment t où l'on fait l'observation, c'est-à-dire au moment où le rayon lumineux arrive en A. Ce rayon est arrivé au point B au temps $t-\tau$, et comme la lunette AB se déplace avec la Terre, à ce moment elle occupait la position A'B'. La direction AB' est celle de la droite qui joint l'observateur au temps t à l'astre au temps t_0.

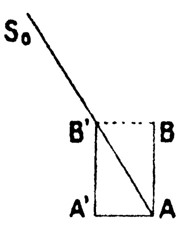


Fig. 41

La lumière parcourt le segment B'A en même temps que l'observateur parcourt A'A ; il semble donc que la forme de la figure doive changer avec le milieu qui remplit l'espace B'A, puisque la vitesse de la lumière change avec le milieu qu'elle

traverse. Mais une théorie plus approfondie, confirmée par la célèbre expérience des astronomes de Greenwich, montre qu'il n'en est rien. Il faut toujours considérer que la lumière décrit le segment B'A avec sa vitesse dans le vide, soit V. Pour plus de détails à ce sujet, nous renverrons aux traités de Physique.

Appelons x, y, z les coordonnées du point A au temps t par rapport à des axes absolument fixes; si v est la vitesse absolue de A, les projections de cette vitesse sur les axes seront

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

Soient de plus α, β, γ les cosinus directeurs de la direction AS_0; α', β', γ' ceux de la direction apparente AB. On a $\overline{AB'} = V\tau$, et comme le temps τ est très court, on a aussi $\overline{A'A} = v\tau$.

Le vecteur $\overline{A'B'}$ étant la somme géométrique $\overline{A'A} + \overline{AB'}$, on peut écrire, en posant $\frac{AB}{\tau} = V'$, les relations fondamentales

$$(1) \quad \begin{cases} V'\alpha' = V\alpha + \dfrac{dx}{dt}, \\ V'\beta' = V\beta + \dfrac{dy}{dt}, \\ V'\gamma' = V\gamma + \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Examinons ce que nous savons sur la vitesse v. Nous pouvons la considérer comme la résultante de trois autres :

1° la vitesse d'entraînement du système solaire, v_0 ;

2° la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil, v_1 ;

3° la vitesse du lieu d'observation A par rapport au centre de la Terre, v_2.

Prenons pour unité de longueur le kilomètre, pour unité de temps la seconde de temps moyen, de sorte que $V = 300\,000$, d'une façon très approchée. La durée de la révolution sidérale de la terre étant de $365^j,256$, on a, en appelant toujours b la valeur moyenne de la distance de la Terre au Soleil, $\frac{2\pi b}{365,256 \times 86\,400}$ pour valeur moyenne de la vitesse v_1, c'est-à-

dire, d'après la valeur de b donnée précédemment, 29,8. Le rapport $\frac{v_1}{V}$ est donc fort petit, égal très sensiblement à $\frac{1}{10000}$.

Si a désigne toujours le rayon équatorial de la Terre, et si φ est la latitude du lieu d'observation, la vitesse v_2 est sensiblement égale à $\frac{2\pi a \cos\varphi}{86\,164}$, puisque le jour sidéral contient 86 164 secondes de temps moyen. On a ainsi $v_2 = 0{,}465 \cos\varphi$, et le rapport $\frac{v_2}{V}$ ne dépasse pas $\frac{1}{600\,000}$.

Quant à la vitesse v_0, nous ne la connaissons pas. Toutefois on est en droit de regarder le système solaire comme se déplaçant par rapport aux étoiles d'un mouvement rectiligne et uniforme dont la vitesse est du même ordre de grandeur que v_1. Sans insister sur ce point, nous regarderons la vitesse v_0 comme satisfaisant à ces conditions.

Il est clair, après cette discussion sur l'ordre de grandeur des rapports tels que $\frac{v_1}{V}$, que l'on peut considérer les trois vitesses v_0, v_1, v_2 comme agissant séparément, et que pour avoir leur effet total, il suffit d'ajouter leurs effets partiels. Ce sera là pour nous une hypothèse fondamentale.

Nous avons par suite à envisager séparément :

1° *l'aberration séculaire*, due à la vitesse v_0 ;

2° *l'aberration annuelle*, due à la vitesse v_1 ;

3° *l'aberration diurne*, due à la vitesse v_2.

Aberration séculaire. — Nous ne pouvons pas calculer l'effet de cette aberration. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, d'après les hypothèses faites, elle donne aux différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ des valeurs constantes, tant que l'on peut considérer α, β, γ comme étant eux-mêmes constants.

Aberration annuelle en longitude et latitude. — D'après les formules fondamentales (1), le calcul de l'aberration revient à un changement de coordonnées, l'origine changeant, tandis que les axes restent parallèles à eux-mêmes. On peut donc appliquer les formules générales du Chapitre III, en faisant $r = V$, $r' = V'$, et prenant pour x_0, y_0, z_0 les composantes de

la vitesse v_1 ; on doit d'ailleurs, à cause de la petitesse du rapport $\frac{v_1}{V}$, appliquer les formules différentielles.

Si alors on veut obtenir dans un certain système de coordonnées, les différences $\psi' - \psi$, $\theta' - \theta$, ou $d\psi$, $d\theta$, des coordonnées angulaires de la direction apparente AB et de la direction AS_0, il suffit évidemment de prendre les formules correspondantes relatives à la parallaxe annuelle, et de remplacer les seconds membres par leurs dérivées changées de signe par rapport au temps, en même temps que ϖ par $\frac{b}{V}$.

Si donc les coordonnées employées sont les coordonnées écliptiques, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \cos\beta \,.\, d\lambda &= -\frac{b}{V}\frac{d}{dt}\left[\frac{R}{b}\sin(\odot - \lambda)\right], \\ d\beta &= \frac{b}{V}\sin\beta\,\frac{d}{dt}\left[\frac{R}{b}\cos(\odot - \lambda)\right]. \end{aligned}\right.$$

Or le Soleil décrit autour de la Terre une ellipse de demi-grand axe b, d'excentricité $e = \sin\varphi$, la longitude du périgée étant ϖ ; de sorte que l'équation de cette trajectoire est

$$\frac{R}{b} = \frac{\cos^2\varphi}{1 + \sin\varphi\cos(\odot - \varpi)};$$

de plus, ce mouvement ayant lieu suivant la loi des aires, on a

$$\frac{R^2}{b^2}\frac{d\odot}{dt} = n\cos\varphi,$$

n étant une constante égale à $\frac{2\pi}{T}$, si T désigne le temps de la révolution sidérale du Soleil autour de la Terre : la surface totale de l'ellipse décrite est en effet $\pi b^2\cos\varphi$.

Il est facile dans ces conditions de voir que l'on a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{R}{b}\sin(\odot - \lambda)\right] &= \frac{n}{\cos\varphi}\left[\cos(\odot - \lambda) + \sin\varphi\cos(\varpi - \lambda)\right], \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{R}{b}\cos(\odot - \lambda)\right] &= \frac{n}{\cos\varphi}\left[-\sin(\odot - \lambda) - \sin\varphi\sin(\varpi - \lambda)\right], \end{aligned}\right\}$$

et par suite, en posant

$$k = \frac{bn}{V\cos\varphi},$$

il vient

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\beta\,.\,d\lambda = -k[\cos(\odot - \lambda) + \sin\varphi\cos(\varpi - \lambda)], \\ \quad d\beta = -k\sin\beta[\sin(\odot - \lambda) + \sin\varphi\sin(\varpi - \lambda)]. \end{cases}$$

La quantité k est la *constante de l'aberration* ; elle a été déterminée par l'observation, et sa valeur fixée par la Conférence de Paris (1896) est $20'',47$. On trouve d'ailleurs le même résultat en partant des valeurs numériques déjà données pour V, T, b, et observant que $\varphi = 57'$, environ.

Le facteur $k \sin\varphi$ est par suite petit et ne dépasse pas $0'',34$.

L'équation de la lumière est le temps $\frac{b}{V}$ que met la lumière à parcourir le demi-grand axe de l'orbite solaire ; sa valeur est donc $498^s,38$ ou $8^m 18^s,38$.

Aberration annuelle en ascension droite et déclinaison. — En partant des formules correspondantes pour la parallaxe, on trouvera de même pour l'aberration annuelle en ascension droite et déclinaison :

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\delta . d\alpha = -k[\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\odot + \sin\alpha\sin\odot] \\ \qquad\qquad - k\sin\varphi[\cos\varepsilon\cos\alpha\cos\varpi + \sin\alpha\sin\varpi], \\ d\delta = -k[\sin\varepsilon\cos\delta\cos\odot + \sin\delta\cos\alpha\sin\odot - \cos\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\cos\odot] \\ \qquad - k\sin\varphi[\sin\varepsilon\cos\delta\cos\varpi + \sin\delta\cos\alpha\sin\varpi - \cos\varepsilon\sin\delta\sin\alpha\cos\varpi]. \end{cases}$$

Ces formules sont très employées ; voici comment on les calcule pratiquement, en laissant de côté les termes qui contiennent $k \sin\varphi$ en facteur, pour des raisons que nous verrons plus loin : ces termes pourraient d'ailleurs être calculés d'une façon absolument semblable.

La correction $d\alpha$ étant calculée en secondes de temps, tandis que $d\delta$ est exprimée en secondes d'arc, on pose, en faisant $k = 20,47$,

$$C = -k\cos\varepsilon\cos\odot,$$
$$D = -k\sin\odot,$$

$$c = \frac{1}{15}\cos\alpha\,\text{séc}\,\delta, \qquad c' = \text{tg}\,\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta,$$

$$d = \frac{1}{15}\sin\alpha\,\text{séc}\,\delta, \qquad d' = \sin\delta\cos\alpha,$$

de sorte que C et D dépendent uniquement de la position du Soleil, tandis que les coefficients c, d, c', d' dépendent uniquement des coordonnées α, δ.

Dans ces conditions, on a immédiatement

$$d\alpha = Cc + Dd, \qquad d\delta = Cc' + Dd'.$$

On pose encore

$$h \sin H = C, \qquad h \cos H = D, \qquad i = C \operatorname{tg} \varepsilon,$$

et l'on a aussi bien avec ces nouveaux éléments,

$$(4) \qquad \begin{cases} d\alpha = \frac{1}{15} h \sin (H + \alpha) \operatorname{séc} \delta, \\ d\delta = h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta. \end{cases}$$

Nous reviendrons bientôt sur l'usage de ces résultats.

Représentation géométrique. — Cherchons, comme pour la parallaxe, la courbe décrite par la position apparente S' de l'astre autour de sa position moyenne S, en vertu de l'aberration. En conservant les mêmes notations et faisant abstraction du petit terme en $k \sin \varphi$, on a ici

$$\begin{cases} \xi = - k \cos (\odot - \lambda), \\ \eta = - k \sin \beta \sin (\odot - \lambda). \end{cases}$$

Le point S' décrit donc encore une petite ellipse, dont les demi-axes dirigés suivant $S\xi$ et $S\eta$ valent k et $k \sin \beta$, et la période du mouvement est une année ; le sens du mouvement est le même que pour la parallaxe.

En composant ce mouvement avec celui dû à la parallaxe, on a :

$$\begin{cases} \xi = - k \cos (\odot - \lambda) + \varpi \sin (\odot - \lambda) \\ \eta = - k \sin \beta \sin (\odot - \lambda) - \varpi \sin \beta \cos (\odot - \lambda), \end{cases}$$

de sorte que la trajectoire résultante est une ellipse semblable à la précédente, mais dont le demi-grand axe vaut $\sqrt{k^2 + \varpi^2}$.

Ces résultats étaient faciles à prévoir : AB' étant supposé fixe, le vecteur $\overline{B'B}$ est proportionnel à la vitesse v_1 du point A : en supposant que la Terre décrive autour du Soleil un cercle

d'un mouvement uniforme, le point B décrit donc lui-même en une année un cercle dont le plan est parallèle à celui de l'écliptique, et l'on en tire les mêmes conséquences que dans le cas de la parallaxe.

Aberration diurne. — De même que pour l'aberration annuelle, il suffit, pour avoir l'aberration diurne en ascension droite et en déclinaison, de prendre les formules correspondantes de la parallaxe diurne, et de remplacer les seconds membres par leurs dérivées changées de signe par rapport au temps, en même temps que r par V. On obtient donc, en remarquant que la dérivée du temps sidéral par rapport au temps moyen est $\frac{2\pi}{86\,164}$ avec les unités choisies,

$$\left\{\begin{aligned} \cos\delta\,.\,d\alpha &= \frac{2\pi}{86\,164}\varpi_0\frac{b}{V}\rho\cos\varphi'\cos(t-\alpha),\\ d\delta &= \frac{2\pi}{86\,164}\varpi_0\frac{b}{V}\rho\cos\varphi'\sin\delta\sin(t-\alpha).\end{aligned}\right.$$

Remplaçant $\varpi_0 b$ par a, et faisant

$$k' = \frac{2\pi a}{86\,164\,V} = 0'',320,$$

on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\delta\,.\,d\alpha &= k'\rho\cos\varphi'\cos(t-\alpha),\\ d\delta &= k'\rho\cos\varphi'\sin\delta\sin(t-\alpha).\end{aligned}\right.$$

L'aberration diurne est donc toujours très petite; elle est nulle au méridien en déclinaison.

On peut la représenter géométriquement comme l'aberration annuelle.

Les formules que nous venons d'établir supposent naturellement que $\cos\beta$, ou $\cos\delta$, suivant les coordonnées employées, n'est pas très petit; dans le cas contraire, on appliquerait la méthode de Fabritius.

Théorème général. — Revenons aux équations fondamentales (1), et supposons d'une façon générale que la vitesse v du point A soit la résultante de deux autres vitesses v' et v'', dont les projections sur les axes sont respectivement p', q', r', et

p'', q'', r'', de sorte que

$$V'\alpha' = V\alpha + p' + p'',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Soient de plus $d'\alpha$, $d'\beta$, $d'\gamma$ les corrections d'aberration dues à la vitesse v' ; $d''\alpha$, $d''\beta$, $d''\gamma$ les corrections dues à la vitesse v'', de sorte que notre hypothèse fondamentale sur l'indépendance de ces corrections étant conservée, on a

$$\alpha' = \alpha + d'\alpha + d''\alpha,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Considérons la direction de cosinus directeurs $\alpha + d'\alpha$, $\beta + d'\beta$, $\gamma + d'\gamma$, ou encore $\alpha' - d''\alpha$, $\beta' - d''\beta$,, $\gamma' - d''\gamma$, c'est-à-dire la direction observée AB *corrigée* de l'aberration relative à v''. Il existe un nombre V'' tel que

$$V''(\alpha + d'\alpha) = V\alpha + p',$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

d'après la façon même dont on a déterminé $d'\alpha$,... Multipliant ces relations par $t - t_0$, on a aussi

$$V''(\alpha + d'\alpha)\,(t - t_0) = V(t - t_0)\,\alpha + p'(t - t_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Prenons alors un point A_0 tel que le vecteur $\overline{A_0A}$ soit parallèle à v' est égal à $v'\,(t - t_0)$, et remarquons que le vecteur $\overline{AS_0}$ est égal à $V(t - t_0)$ et a pour cosinus directeurs α, β, γ. Les équations précédentes montrent que $\alpha + d'\alpha$,... sont précisément les cosinus directeurs de la direction A_0S_0 (*fig.* 42).

Fig. 42

Donc la direction apparente, corrigée de l'aberration relative à v'', est la direction de la droite A_0S_0, le point A_0 étant choisi comme il a été dit.

Tel est le théorème que nous avions en vue.

Il faut d'ailleurs observer que A_0 n'est pas en général la position qu'aurait le point A au temps t_0, s'il n'était soumis qu'au mouvement qui correspond à la vitesse v', car ce mouvement n'est pas en général rectiligne et uniforme.

Applications du théorème. I. — Soit α', β', γ' la direction

apparente *d'une étoile*, et corrigeons cette direction de *l'aberration des fixes*, c'est-à-dire de l'aberration annuelle et de l'aberration diurne ; la nouvelle direction α'', β'', γ'' sera celle de A_0S_0, le vecteur A_0A étant égal à $v_0(t - t_0)$, d'après le théorème précédent ; soit de plus O_0 la position du Soleil au temps t_0 (*fig.* 43). La vitesse v_0 étant, ainsi que nous l'avons supposé, constante en grandeur et en direction, le point A_0 est la position qu'occuperait l'observateur au temps t, si, à partir du moment t_0, il n'avait été soumis qu'à son mouvement annuel et diurne. Si donc on corrige encore la direction α'', β'', γ'' de la parallaxe annuelle relative au temps t, on obtient finalement la direction O_0S_0 qui joint les positions du Soleil et de l'étoile au temps t_0, direction qui peut être considérée comme constante, au moins pendant très longtemps.

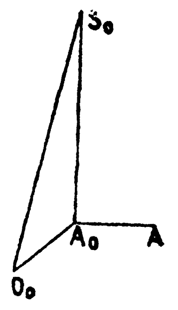


Fig. 43

II. — Supposons maintenant que l'astre observé soit un astre rapproché, c'est-à-dire tel que le *temps d'aberration* correspondant $t - t_0$ soit assez petit pour qu'on puisse considérer la vitesse de translation v_1 comme constante en grandeur et en direction pendant ce temps : c'est le cas de tous les astres du système solaire, puisque $t - t_0$ ne dépasse guère 4 heures, même pour Neptune.

a) Soit alors α'', β'', γ'' la direction α', β', γ' corrigée de l'aberration des fixes comme plus haut ; on peut répéter ce qui précède sur le point A_0, et considérant l'astre comme appartenant au système solaire, on peut dire que la direction α'', β'', γ'' est celle qui joint l'observateur au temps t à l'astre au temps t_0, mais par rapport au système solaire pris comme système de comparaison.

b) Mais on peut appliquer autrement le théorème général. Soit α''', β''', γ''' la direction apparente α', β', γ' corrigée seulement de l'aberration diurne. Alors A_0 est tel que le vecteur $\overline{A_0A}$ soit égal à $(v_0 + v_1)(t - t_0)$, de sorte que le temps $t - t_0$ étant court, le point A_0 est la position qu'occuperait l'observateur, si, à partir du moment t_0, il n'avait été soumis qu'à son mouvement diurne. Si donc T_0 désigne le centre de la Terre au

temps t_0, et que l'on corrige encore la direction α''', β''', γ''' de la parallaxe diurne au temps t, on obtient finalement la direction T_0S_0, c'est-à-dire la position géocentrique vraie de l'astre au temps t_0 (*fig.* 44).

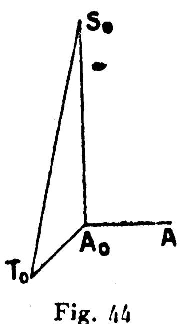


Fig. 44

Si en particulier A était le centre de la Terre, l'aberration diurne serait nulle, de sorte que la direction apparente de l'astre au temps t n'est autre que sa direction vraie au temps t_0, en entendant toujours par direction vraie celle qui joint les positions *au même instant* du centre de la Terre et de l'astre. C'est là le théorème de *l'aberration planétaire*.

Appliquons ces résultats au Soleil, A étant toujours le centre de la Terre.

Soit $\odot'$ la longitude apparente du Soleil au temps t, telle qu'on la trouve dans les éphémérides, et $\odot$ la longitude vraie. D'après (a), le Soleil étant fixe dans le système solaire, il suffit de corriger $\odot'$ de l'aberration annuelle pour avoir $\odot$; donc, d'après les formules (2), on a

$$\odot = \odot' + k + k \sin\varphi \cos(\odot - \varpi).$$

D'après (b), il suffit de prendre la longitude apparente au temps $t + \Delta t$, Δt étant le temps d'aberration que l'on peut prendre égal à $\frac{R}{V}$, en ne commettant qu'une erreur du même ordre que celle qui résulte de notre hypothèse fondamentale; donc, ce temps étant très petit, il vient

$$\odot = \odot' + \frac{R}{V}\frac{d\odot}{dt} = \odot' + k\frac{b\cos^2\varphi}{R} = \odot' + k[1 + \sin\varphi\cos(\odot - \varpi)],$$

d'après les expressions de $\frac{d\odot}{dt}$ et de R données plus haut. Cette valeur est identique à la précédente.

III. — S'il s'agissait enfin d'un astre comme la Lune, très rapproché de la Terre, les résultats précédents subsisteraient, mais on verrait de plus que, $t - t_0$ étant ici assez court pour que la vitesse v_2 elle-même puisse être considérée comme constante en grandeur et en direction pendant ce temps, la position apparente au temps t est la même que la position vraie au temps t_0, non seulement pour le centre, mais pour un point quelconque de la Terre.

LIVRE III

MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES
DÉPLACEMENT DES PLANS FONDAMENTAUX

CHAPITRE X

NOTIONS DE MÉCANIQUE CÉLESTE

Avant d'étudier les mouvements des astres tels qu'ils nous apparaissent, il est nécessaire d'acquérir quelques notions précises sur leurs mouvements dans l'espace, envisagés indépendamment de l'observateur.

Ces notions nous seront fournies par la *Mécanique céleste*, qui est fondée sur le principe de la gravitation universelle, et dont nous allons exposer les résultats élémentaires.

Problème des deux corps. — Considérons deux points matériels, M et M_0, de masses m et m_0, soumis uniquement à leur attraction mutuelle, déterminée par la loi de *Newton* : en d'autres termes, r étant la distance M_0M, et f un coefficient constant, la force qui agit sur M, par exemple, est dirigée suivant MM_0, et a pour intensité $\frac{fmm_0}{r^2}$ (*fig.* 45).

Fig. 45

Etudions dans ces conditions le mouvement relatif de M par rapport à M_0, en rapportant ce mouvement à des axes de directions fixes ayant pour origine M_0.

L'accélération de M dans ce mouvement relatif est simple-

ment ici la différence géométrique entre son accélération absolue γ et l'accélération d'entraînement, qui n'est autre que l'accélération absolue du point M_0, soit γ_0 : or γ a pour valeur $\frac{fm_0}{r^2}$, et est dirigée suivant MM_0, tandis que γ_0 a pour valeur $\frac{fm}{r^2}$ et est dirigée suivant M_0M ; l'accélération relative de M vaut donc $\frac{f(m_0+m)}{r^2}$, et est dirigée suivant MM_0.

On est alors ramené à étudier le mouvement d'un point de masse I attiré par un centre fixe M_0, la force étant égale à $\frac{f(m_0+m)}{r^2}$.

Dans ces conditions, on sait d'abord que le mouvement se fait dans un plan passant par M_0 : la trajectoire, ou *l'orbite*, de M est plane.

Si ensuite on définit le point M, dans le plan de sa trajectoire, par ses coordonnées polaires r et v, l'angle v étant compté à partir d'un axe quelconque, on sait encore que le mouvement s'effectue suivant la loi des aires, et que le théorème des forces vives est applicable ; par suite le problème est résolu par les deux équations

$$r^2\frac{dv}{dt}=C, \qquad \frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{dv^2}{dt^2}=f(m_0+m)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

C et a étant deux constantes, et t désignant le temps. L'élimination de t entre ces deux équations permet d'écrire

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)^2}{dv^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{f(m_0+m)}{C^2}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right);$$

posant alors

$$C^2=f(m_0+m)p, \qquad a=\frac{p}{1-e^2},$$

de sorte que C et a sont remplacées par les deux nouvelles constantes positives p et e, l'équation différentielle de la trajectoire prend la forme

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)^2}{dv^2}+\frac{1}{r^2}=\frac{2}{pr}-\frac{1-e^2}{p^2},$$

et donne encore, par différentiation,

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dv^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}.$$

L'intégrale générale de cette dernière équation est de la forme évidente

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}[1 + c\cos(v - v_0)],$$

en désignant par c et v_0 deux constantes arbitraires ; par suite l'intégrale de l'équation donnée est de la même forme, mais à la condition de choisir convenablement la quantité c ; il suffit d'écrire que cette équation est effectivement vérifiée pour trouver $c = e$.

Choisissant l'axe polaire auquel est rapporté le mouvement de façon que l'on ait $v_0 = 0$, et comptant l'angle polaire v, qui reçoit alors le nom d'*anomalie vraie*, dans le sens du mouvement, on a donc finalement pour équation de la trajectoire

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v},$$

et le mouvement sur cette trajectoire est lui-même défini par l'équation des aires

$$r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{f(m_0 + m)p},$$

à l'aide de laquelle nous déterminerons le temps un peu plus loin.

Éléments de l'orbite. — Les équations que nous venons d'obtenir correspondent aux deux premières des lois bien connues de *Képler*, déduites de l'observation : la première nous montre en effet que l'orbite est une section conique admettant M_0 pour foyer, et il résulte de la seconde que l'aire balayée par le rayon vecteur est proportionnelle au temps.

La conique trajectoire admet pour excentricité e, et pour paramètre p : ce sont les deux *éléments* qui déterminent la forme et la grandeur de l'orbite. Si d'ailleurs M_0x' est l'axe polaire, cette demi-droite coïncide avec l'axe focal de la conique, et est

toujours dirigée vers celui des deux sommets situés sur cet axe qui est le plus voisin du foyer M_0 : ce sommet P est le *périhélie* de l'orbite, si comme nous le supposerons dans ce qui suit, M_0 est le Soleil ; c'en est le *périgée*, ou le *périjove*, etc., si M_0 est la Terre, ou Jupiter, etc.

L'orbite est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'excentricité e est inférieure, égale ou supérieure à l'unité, c'est-à-dire encore suivant que la constante a qui figure dans l'équation des forces vives est positive, infinie ou négative. Dans tous les cas, le rayon vecteur est toujours positif, et la concavité de l'orbite est tournée vers M_0 ; si l'on a $e > 1$, la trajectoire n'est en réalité qu'une branche d'hyperbole.

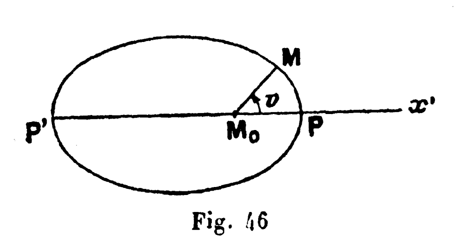


Fig. 46

Dans le cas de l'ellipse (*fig.* 46), l'angle polaire v prend toutes les valeurs possibles, mais le point M reprend la même position quand v augmente de 2π ; le rayon vecteur r est minimum au périhélie, pour $v = 0$, et vaut alors $\frac{p}{1+e}$; il est maximum, et vaut $\frac{p}{1-e}$, à l'*aphélie*, en P', pour $v = \pi$. La ligne PP' est la ligne des *apsides*.

Le demi-grand axe de la courbe est égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}\right)$, ou $\frac{p}{1-e^2}$: c'est donc la constante a qui figure dans l'équation des forces vives. Le demi-petit axe serait $a\sqrt{1-e^2}$.

Le plus souvent, on substitue à l'élément p le demi-grand axe a.

Dans le cas de la parabole (*fig.* 47), l'anomalie vraie varie de $-\pi$ à $+\pi$, et quand elle croît de 0 à π en valeur absolue, le rayon vecteur r croît sans limite depuis $\frac{p}{2}$; on substitue d'ordinaire au paramètre p la distance périhélie q, égale à $\frac{p}{2}$, et l'équation de

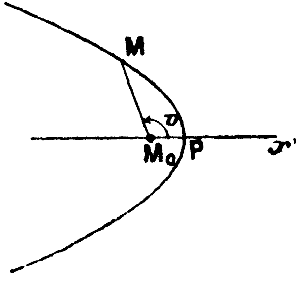


Fig. 47

la trajectoire peut s'écrire alors sous la forme

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}.$$

Enfin, dans le cas de l'hyperbole (*fig.* 48), l'angle v ne peut varier que de $-\alpha$ à $+\alpha$, α étant l'angle positif et inférieur à π dont le cosinus est $-\frac{1}{e}$; quand v croît de 0 à α en valeur absolue, le rayon recteur r augmente sans limite.

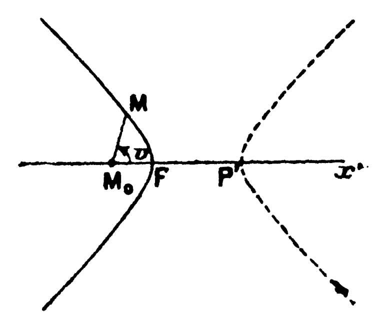


Fig. 48

En observant que si P′ est le second sommet de la courbe, on a $M_0P' = \frac{-p}{1-e}$, on voit que le demi-axe transverse a pour valeur $\frac{1}{2}\left(-\frac{p}{1-e} - \frac{p}{1+e}\right)$, ou $\frac{p}{e^2-1}$: c'est donc la constante a qui figure dans l'équation des forces vives, mais changée de signe.

Il est nécessaire maintenant de définir la position de l'orbite. A cet effet, il suffit de se reporter à ce que nous avons dit au Chapitre III sur la définition d'un plan orienté. Considérons donc la sphère céleste de centre M_0, et les traces sur cette sphère des axes fondamentaux M_0x, M_0y, M_0z, de directions fixes, auxquels on doit rapporter le mouvement de M (*fig.* 49); soit alors C le grand cercle déterminé sur la sphère par le plan de l'orbite, orienté dans le sens du mouvement de M.

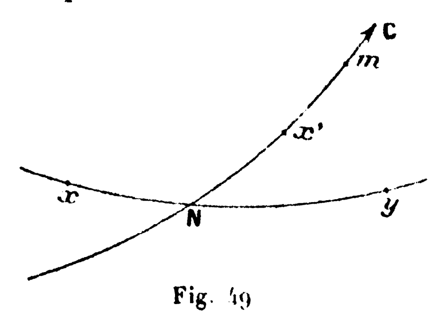


Fig. 49

Les points N et N′ où se coupent les grands cercles xy et C sont les *nœuds* de l'orbite : N est le *nœud ascendant*, si M passe, en traversant N dans le sens de l'orientation de C, de l'hémisphère qui ne contient pas le pôle z du grand cercle xy dans celui qui le contient; N′ est le *nœud descendant*. Enfin soit x' la trace sur la sphère de la direction M_0P du périhélie de l'orbite, et m celle de la direction M_0M à un instant quelconque

t, de sorte que l'arc $x'm$ compté dans le sens de l'orientation de C représente l'anomalie vraie v.

La position du plan de l'orbite, et aussi le sens du mouvement, se trouvent fixés par deux nouveaux *éléments* qui sont 1° l'arc xN, ou Ω, compté dans le sens direct : c'est la *longitude du nœud ascendant*, ou simplement la longitude du nœud (cette expression suppose que le système de coordonnées employé est celui des coordonnées écliptiques, et c'est ce qui arrive en effet presque toujours : on peut toutefois la conserver sans inconvénient dans les autres cas, en ayant bien soin de désigner le plan fondamental ; on peut aussi la modifier convenablement) ; 2° l'angle i que fait en N le grand cercle xy avec le grand cercle C, compté dans le sens de l'orientation du système, et nécessairement compris entre o et π : c'est l'*inclinaison* de l'orbite.

Pour achever maintenant de fixer la position de l'orbite, il suffit de se donner l'arc Nx', désigné par ω, ou encore la somme des arcs xN et Nx', soit $\varpi = \Omega + \omega$, que l'on appelle la *longitude du périhélie* : c'est le cinquième élément de l'orbite. En général c'est la longitude du périhélie que l'on adopte, de préférence à la distance ω du périhélie au nœud ascendant.

L'arc Nm, égal à $v + \omega$, est souvent appelé *argument de la latitude*, tandis que la somme xN + Nm, ou $v + \varpi$, est la *longitude dans l'orbite* de M. Ces expressions supposent encore une fois que les coordonnées employées sont les coordonnées écliptiques : sinon, on les modifiera convenablement, s'il y a lieu.

Nous avons vu précédemment d'ailleurs comment on peut faire un changement de coordonnées, et trouver les nouveaux éléments de l'orbite qui dépendent du choix des coordonnées, remplaçant Ω, i et ϖ ; et nous avons indiqué au Chapitre V une application numérique de ce problème.

Mouvement parabolique. — Il nous reste maintenant, pour avoir complètement résolu le problème des deux corps, à déterminer la relation qui lie le temps t aux coordonnées polaires r et v, c'est-à-dire à intégrer l'équation des aires

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C.$$

Cette intégration est différente suivant la nature de la trajectoire. Laissant de côté le cas de l'hyperbole, qui n'a pas d'importance pratique, traitons tout d'abord le cas de la parabole. On a ici

$$\frac{dt}{dv} = \frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(m_0 + m)}} \frac{1}{\cos^4 \frac{v}{2}};$$

or

$$\frac{1}{2\cos^4 \frac{v}{2}} = \left(1 + \text{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \frac{d.\text{tg}\frac{v}{2}}{dv};$$

donc

$$t - t_0 = \frac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{f(m_0 + m)}} \left(\text{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\text{tg}^3\frac{v}{2}\right),$$

et la nouvelle constante t_0 est manifestement le temps du passage de l'astre au périhélie.

On voit que finalement, puisqu'ici l'excentricité est égale à l'unité, le mouvement parabolique est défini par les cinq *éléments*, ϑ, i, ϖ, q, t_0.

C'est en général à l'étude du mouvement des comètes que ce qui précède s'applique ; alors m est négligeable devant m_0, et pour faciliter le calcul de t en fonction de v, ainsi que le calcul inverse, on réduit en tables (table de *Barker* et ses analogues) la quantité

$$\frac{\text{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\text{tg}^3\frac{v}{2}}{\sqrt{f(m_0 + m)}},$$

à une constante près, suivant le principe adopté pour la construction de la table : le calcul est alors immédiat. A défaut de table, et pour obtenir directement v en fonction de t, on voit qu'il faut, en faisant $x = \text{tg}\frac{v}{2}$, résoudre l'équation du troisième degré à une seule racine réelle

$$x^3 + 3x = \frac{3(t - t_0)\sqrt{f(m_0 + m)}}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}};$$

à cet effet on pose

$$x = \text{cotg}\,\lambda - \text{tg}\,\lambda = \frac{1 - \text{tg}^2\,\lambda}{\text{tg}\,\lambda} = 2\,\text{cotg}\,2\lambda;$$

alors

$$x^3 + 3x = \text{cotg}^3\,\lambda - \text{tg}^3\,\lambda;$$

faisant

$$\text{tg}\,\lambda = \sqrt[3]{\text{tg}\,\varphi},$$

il vient :

$$x^3 + 3x = \text{cotg}\,\varphi - \text{tg}\,\varphi = 2\,\text{cotg}\,2\varphi.$$

Finalement, on aura donc la suite de calculs indiquée par les relations

$$\left\{\begin{aligned} \text{cotg}\,2\varphi &= \frac{3(t - t_0)\sqrt{f(m_0 + m)}}{(2q)^{\frac{3}{2}}}, \\ \text{tg}\,\lambda &= \sqrt[3]{\text{tg}\,\varphi}, \\ \text{tg}\,\frac{v}{2} &= 2\,\text{cotg}\,2\lambda. \end{aligned}\right.$$

Exemple. — On donne [1]

$$t - t_0 = -36,55397,$$
$$\log q = \bar{1},5190730,$$
$$\log \sqrt{f(m_0 + m)} = \bar{2},2355814,$$

et l'on demande de calculer v.

On trouve successivement

$$\varphi = -7°56'53'',10, \qquad \lambda = -27°25'9'',03, \qquad v = -109°15'55'',7.$$

Inversement, cette valeur de v conduit directement à la valeur donnée pour $t - t_0$.

Mouvement elliptique. — Occupons-nous maintenant du cas de l'ellipse, particulièrement important, puisque c'est celui de toutes les planètes.

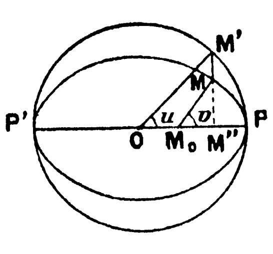


Fig. 50

Il est nécessaire de faire tout d'abord un changement de variables; décrivons sur le grand axe PP' de l'orbite comme diamètre un cercle de centre O (*fig.* 50), et soit M' le point où l'ordonnée M''M de **M**, perpendiculaire à PP', coupe ce cercle ; on sait que l'on a la relation $MM'' = M'M''\sqrt{1 - e^2}$.

(1) Exemple tiré de *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, par Th. v. Oppolzer.

Soit u l'angle de OP avec OM′, ou *anomalie excentrique* ; on a immédiatement sur la figure

$$\begin{cases} r\cos v = a(\cos u - e), \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u, \end{cases}$$

puisque $OM_0 = ae$.

On en déduit

$$r^2\frac{dv}{dt} = r\cos v\,\frac{d}{dt}(r\sin v) - r\sin v\,\frac{d}{dt}(r\cos v)$$
$$= a^2\sqrt{1-e^2}\,(1 - e\cos u)\,\frac{du}{dt}.$$

La constante des aires étant égale à $\sqrt{f(m_0+m)p}$, c'est-à-dire, ici, à $\sqrt{f(m_0+m)\,a(1-e^2)}$, l'équation des aires devient

$$(1 - e\cos u)\,\frac{du}{dt} = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{f(m_0+m)}.$$

En faisant

$$n = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{f(m_0+m)},$$

et intégrant, il vient

$$u - e\sin u = n\,(t - t_0)\,;$$

c'est la relation qui lie r et v au temps t, par l'intermédiaire de l'anomalie excentrique u.

La nouvelle constante t_0 est l'époque d'un passage au périhélie, celui pour lequel on a $u = 0$.

La quantité $n(t - t_0)$, qui varie proportionnellement au temps, est l'*anomalie moyenne*, que nous désignerons par M : elle coïnciderait avec l'anomalie vraie si l'excentricité était nulle.

La quantité $M + \varpi$, que nous désignerons par l, est la *longitude moyenne* du point M : elle coïnciderait avec la longitude vraie de M (le plan fondamental étant celui de l'écliptique), si l'excentricité et l'inclinaison étaient nulles.

Si l_0 est la longitude moyenne à l'origine du temps, ou *longitude moyenne de l'époque*, on a

$$l_0 = -nt_0 + \varpi,$$

et par suite on peut écrire

$$M = nt + l_0 - \varpi, \qquad l = nt + l_0.$$

On remplace toujours en fait la connaissance de t_0 par celle de l_0, et l'on donne en même temps l'*époque*, c'est-à-dire l'origine du temps.

La quantité $1 - e \cos u$ est toujours positive, puisque l'on a $e < 1$: il en résulte que les trois anomalies, vraie, excentrique et moyenne, suivies d'une façon continue, comme l'exigent d'ailleurs les relations qui les lient entre elles, varient toutes dans le même sens. On voit de plus immédiatement qu'elles deviennent égales toutes les trois lorsque M est au périhélie P ou à l'aphélie P′, et seulement dans ces cas : pour le périhélie, leur valeur commune est un multiple de 2π, et pour l'aphélie, c'est un multiple impair de π ; il en résulte qu'en général elles sont comprises toutes les trois dans la même demi-circonférence.

Le mouvement est d'ailleurs périodique, et la période en est $\frac{2\pi}{n}$ ou T, puisque si t augmente de $\frac{2\pi}{n}$, les trois anomalies augmentent chacune de 2π, le point M reprenant la même position. La quantité n est appelée d'après cela le *moyen mouvement* de M dans son mouvement autour de M_0 : ce serait la vitesse angulaire constante d'un mobile tournant uniformément autour de M_0 dans le temps T que met M à reprendre sa position primitive.

En particulier, les époques des divers passages au périhélie sont $t_0 + \frac{2k\pi}{n}$, k étant un entier quelconque.

On peut ajouter que le mouvement est symétrique par rapport au grand axe PP′ de l'orbite ; et en effet, si l'anomalie moyenne prend deux valeurs telles que M et $2k\pi - M$, k étant un entier quelconque, les anomalies excentriques et vraies correspondantes seront telles que u et $2k\pi - u$, v et $2k\pi - v$, et le point M occupera deux positions symétriques par rapport à PP′.

Les éléments d'une orbite elliptique sont finalement les six constantes Ω, i, ϖ, a, e, l_0 ; on peut d'ailleurs remplacer le demi-grand axe a par le moyen mouvement n, puisque l'on a

$$n^2a^3 = f(m_0 + m).$$

Cette relation correspond à la troisième loi de Képler : si

l'on peut négliger m devant m_0, le carré du temps de révolution T est proportionnel au cube du grand axe.

Le temps qui correspond à une position donnée de M sur son orbite est facile à calculer par les formules établies ci-dessus, qui donnent successivement u et t, connaissant r et v : ce temps n'est déterminé qu'à un multiple de T près, si l'on ne donne pas en même temps le nombre de révolutions totales effectuées par M à partir de l'époque prise comme origine.

Il convient de faciliter le calcul en transformant les relations qui lient u à r et v, soit

$$\begin{cases} r \cos v = a(\cos u - e), \\ r \sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u\,; \end{cases}$$

élevant d'abord chacune d'elles au carré et ajoutant, il vient

$$r^2 = a^2(1 + e^2\cos^2 u - 2e\cos u),$$

d'où, sans aucune ambiguïté,

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Ecrivons alors cette nouvelle relation et celle qui donne $r \cos v$ sous la forme

$$\begin{cases} r\left(\cos^2\frac{v}{2} + \sin^2\frac{v}{2}\right) = a(1 - e\cos u), \\ r\left(\cos^2\frac{v}{2} - \sin^2\frac{v}{2}\right) = a(\cos u - e)\,; \end{cases}$$

on en tire immédiatement par addition et soustraction, sans ambiguïté encore, puisque u et v sont compris dans la même demi-circonférence,

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u}{2}, \\ \sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u}{2}\,; \end{cases}$$

par suite, on a aussi, pour relier ensemble l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique, la formule

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Si, comme on le fait souvent, on pose $e = \sin\varphi$, on observera que l'on peut écrire

$$\sqrt{1+e} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right), \quad \sqrt{1-e} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{u}{2};$$

et l'on aura aussi sans peine

$$\sin\frac{v-u}{2} = \sqrt{\frac{a}{r}}\sin\frac{\varphi}{2}\sin u = \sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{\varphi}{2}\operatorname{séc}\varphi\sin v,$$

formule qui permet d'obtenir une grande précision dans le calcul de la différence $v - u$, lorsque l'excentricité n'est pas grande.

Envisageons maintenant le problème inverse, qui consiste, connaissant t, à calculer les coordonnées polaires r et v qui définissent la position de M sur son orbite. D'après les formules précédentes, tout revient à calculer l'anomalie excentrique u, définie par l'*équation de Képler*

$$u - e\sin u = \mathrm{M} = nt + l_0 - \varpi.$$

C'est une équation transcendante qui a une seule racine réelle, d'après ce qui a été dit antérieurement, comprise entre les mêmes multiples de π que M : on peut d'ailleurs, pour la commodité du calcul, réduire M, et par suite u, à être compris entre les limites $-\pi$ et π, et faire abstraction de leur signe.

Pour calculer la racine de l'équation de Képler, on applique, à défaut de tables appropriées, une méthode d'approximation; sans insister sur les nombreux procédés qui ont été proposés spécialement pour cette équation, contentons-nous d'indiquer le résultat que fournit la méthode classique de Newton. Si u_0 est une valeur approchée de u, on aura une meilleure valeur u_1 en faisant :

$$u_1 = u_0 - \frac{u_0 - e\sin u_0 - \mathrm{M}}{1 - e\cos u_0},$$

et en continuant, on approchera de la racine autant qu'on le voudra. Il est d'ailleurs toujours facile d'avoir une première valeur approchée de u en observant que cet angle est néces-

sairement compris, d'après l'équation même, entre M et $M + e$, si l'on suppose comme plus haut M compris entre o et π.

EXEMPLE. — On donne [1] $e = 0,5549454$, $M = 34°19'36'',14$. Calculer r et v.

Dans ce cas assez défavorable, puisque l'excentricité est grande, prenons arbitrairement comme première valeur approchée de u, $u_0 = 50°$; on en déduit $u_1 = 63°$; cette nouvelle valeur conduit à $62°32',5$, qui donne enfin elle-même $u = 62°32'25'',79$.

On en tire ensuite $v = 97°14'37'',40$, $\log \frac{r}{a} = \bar{1},8716328$; et ces résultats peuvent être vérifiés de différentes façons, en utilisant les diverses formules établies.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, la solution des différents problèmes que nous venons de traiter est largement facilitée par l'emploi de tables spécialement construites à cette intention.

La Table ci-dessous (p. 214), extrêmement sommaire, montre les valeurs correspondantes des trois anomalies : elle peut suffire pour fournir une première valeur approchée de la racine de l'équation de Képler dans les cas usuels. Les deux arguments de la Table sont l'anomalie vraie, variant de 10° en 10°, et l'excentricité variant de dixième en dixième ; les valeurs de l'anomalie excentrique et de l'anomalie moyenne sont données à moins d'un quart de degré près, par défaut ou par excès.

Cas des orbites très excentriques. — Lorsque l'excentricité est très voisine de l'unité, ainsi qu'il arrive pour les orbites d'un grand nombre de comètes périodiques, l'anomalie excentrique u reste petite tant que l'anomalie vraie ne prend pas de grandes valeurs ; et dans ces conditions, il est clair que l'usage des tables ordinaires ne permet pas de calculer avec précision la quantité $u - e \sin u$, puisque celle-ci se présente comme la différence de deux nombres voisins.

En prenant par exemple [2] $e = 0,99685545$, $v = 95°27'54''$,

---

[1] Voir la Note précédente.

[2] Exemple tiré des *Hülfstafeln* de J. J. ASTRAND.

Valeurs correspondantes des trois anomalies

v \ e	0,1		0,2		0,3		0,4		0,5		0,6		0,7		0,8		0,9	
	u	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M	*u*	M
0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
10	9	8	8	6,5	7,5	5	6,5	4	6	3	5	2	4	1,5	3,5	0,5	2,5	0
20	18	16,5	16,5	13	14,5	10,5	13	8	11,5	6	10	4	8,5	2,5	6,5	1,5	4,5	0,5
30	27	24,5	24,5	20	22	15,5	20	12	17,5	9	15,5	6	13	4	10	2	7	0,5
40	36,5	33	33	27	30	21,5	27	16,5	23,5	12	20,5	8,5	17,5	5,5	14	3	9,5	1
50	45,5	41,5	41,5	34	38	27	34	21	30	16	26,5	11	22	7	17,5	4	12	1,5
60	55	50,5	50,5	41,5	46	33,5	41,5	26,5	37	19,5	32	14	27,5	9	22	5	15	1,5
70	64,5	59,5	59,5	49,5	54,5	40,5	49,5	32	44	24	38,5	17	33	11	26,5	6	18,5	2
80	74,5	69	69	58	63	48	57,5	38	51,5	29	45,5	21	39	13,5	31,5	7,5	22	2,5
90	84,5	78,5	78,5	67	72,5	56	66,5	45,5	60	35	53	25,5	45,5	17	37	9,5	26	3,5
100	94,5	88,5	88,5	77	82,5	65,5	76	53,5	69	42,5	61,5	31,5	53	21	43,5	12	30,5	4,5
110	104,5	99	99	87,5	92,5	75,5	86	63,5	79	51	71	38,5	62	26,5	51	15,5	36,5	6
120	115	109,5	109,5	98,5	103,5	87	97	74,5	90	61,5	82	48	72	34	60	20,5	43,5	8
130	125,5	121	120,5	110,5	115	99,5	109	87,5	102	74	94	59,5	84	44	71	28	52,5	11,5
140	136	132	132	123,5	127	113,5	122	102,5	115,5	89,5	108	75	98	58,5	85	39,5	64,5	18
150	147	144	143,5	137	140	129	135,5	119,5	130	108,5	123,5	95	115	78,5	102,5	57,5	81	30
160	158	156	155,5	151	153	145	150	138,5	146	130	141	119,5	134,5	106	124	86,5	105	55
170	169	168	168	165,5	166,5	162,5	165	159	163	154,5	160	148,5	156,5	140,5	150,5	128	138	104
180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180	180

on trouve $u = 5°$, et en exprimant maintenant les angles en radians,

$$u = 0{,}0872664 6, \quad e \sin u = 0{,}08688168, \quad M = 0{,}00038478,$$

de sorte que le résultat n'a plus que cinq chiffres significatifs, bien qu'on ait calculé avec sept chiffres.

On peut remédier à cet inconvénient grave de bien des façons : contentons-nous d'indiquer brièvement une méthode très simple.

On peut mettre l'équation de Képler sous la forme

$$(1 - e) \sin u + (\alpha \sin u)^3 = M,$$

en faisant

$$\alpha^3 = \frac{u - \sin u}{\sin^3 u};$$

en fonction de $\operatorname{tg} \frac{u}{2}$, ou t, on a facilement

$$\alpha^3 = \frac{1}{6}(1 + t^2)^3 \left(1 - \frac{6}{5} t^2 + \frac{9}{7} t^4 - \frac{12}{9} t^6 + \ldots\right),$$

ou bien

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} (1 + t^2)\left(1 - \frac{2}{5} t^2 + \frac{47}{175} t^4 - \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt[3]{6}} (1 + t^2)^{\frac{3}{3}} \left(1 - \frac{2}{175} t^4 + \ldots\right).$$

Si donc on pose encore

$$\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \left(1 - \frac{2}{175} t^4 + \ldots\right),$$

on aura

$$\alpha = \beta \operatorname{séc}^{\frac{6}{3}} \frac{u}{2};$$

et il suffira, pour calculer cette quantité, d'avoir une table des valeurs de la fonction β de u. Or cette fonction varie très peu tant que u ne grandit pas, et une telle table ne demandera que peu d'étendue.

En supposant que u ne dépasse pas 60°, et en se contentant

de six décimales jusqu'à 20°, de cinq ensuite, on a effectivement

$\frac{u}{2}$	$\log \beta$	$\frac{u}{2}$	$\log \beta$
0°	$\bar{1},740616$	20°	$\bar{1},74054$
5°	$\bar{1},740616$	25°	$\bar{1},74042$
10°	$\bar{1},740612$	30°	$\bar{1},74020$
15°	$\bar{1},74059$		

Revenant à l'exemple ci-dessus, on trouve ainsi, par un calcul à six décimales,

$$M = 0,000384785,$$

avec une précision égale.

Pour calculer u connaissant M, on pourra procéder comme précédemment, par approximations successives, en appliquant par exemple la méthode de Newton.

En reprenant encore les mêmes données numériques, on verra d'abord que u est inférieur à $\frac{M}{1-e}$, c'est-à-dire à 7°; en partant de la valeur approchée 6°, on trouvera successivement les nouvelles valeurs 5°,1, 5°,001, et finalement 5° pour u.

Remarque. — On a

$$\begin{aligned}\sin u &= 2 \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2};\end{aligned}$$

d'autre part, si t_0 est l'époque du passage au périhélie, et si q représente la distance périhélie, égale à $a(1-e)$, on a

$$M = n(t-t_0) = \frac{(t-t_0)\sqrt{f(m_0+m)}}{q^{\frac{3}{2}}}(1-e)^{\frac{3}{2}}.$$

Portant ces valeurs dans la nouvelle forme de l'équation de Képler, elle devient

$$\frac{2}{\sqrt{1+e}} \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{1+e}} \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}\right)^3 = \frac{(t-t_0)\sqrt{f(m_0+m)}}{q^{\frac{3}{2}}};$$

si maintenant on fait tendre l'excentricité e vers l'unité,

l'angle u tend vers zéro quel que soit v, α^3 tend vers $\frac{1}{6}$, et à la limite, on retrouve immédiatement l'équation du mouvement parabolique.

Calcul des coordonnées écliptiques ou équatoriales. — Il convient enfin de calculer les coordonnées rectangulaires x, y, z et les coordonnées angulaires ψ, θ (suivant notre notation générale) du point M par rapport aux axes fondamentaux M_0x, M_0y, M_0z; les données de ce calcul seront nécessairement les éléments Ω, i, ϖ qui fixent la position de l'orbite, d'une part, puis les quantités r et v qui déterminent la position de M dans son orbite, d'autre part.

A cet effet, achevons d'abord avec M_0x' comme premier axe, un système d'axes rectangulaires M_0x', M_0y', M_0z', orienté comme le système M_0xyz, et tel que M_0y' soit dirigé vers le point de l'orbite dont l'anomalie vraie est $+\frac{\pi}{2}$; en d'autres termes encore, la trace de M_0z' sur la sphère céleste sera celui des pôles du plan de l'orbite qui est tel que, par rapport à M_0z', le sens du mouvement de M soit celui de l'orientation des axes fondamentaux.

Si ψ', θ' sont les coordonnées angulaires de M par rapport à ces nouveaux axes, on a visiblement $\psi' = v$, $\theta' = 0$; de plus la position des nouveaux axes par rapport aux anciens est définie comme nous l'avons fait au Chapitre III, à la condition de remplacer σ par Ω, σ' par $\Omega - \varpi$, tout en conservant i. Par suite, on a immédiatement, d'après les formules du Chapitre rappelé

$$\left\{\begin{aligned} \cos\theta\sin(\psi - \Omega) &= \cos i \sin(v + \varpi - \Omega), \\ \cos\theta\cos(\psi - \Omega) &= \cos(v + \varpi - \Omega), \\ \sin\theta &= \sin i \sin(v + \varpi - \Omega); \end{aligned}\right.$$

ces formules sont fort avantageuses pour le calcul de ψ et θ: elles dépendent de v par la combinaison $v + \varpi - \Omega$, qui est l'argument de la latitude, comme nous l'avons déjà dit, et l'on voit comment ce nom est justifié.

Pour avoir les coordonnées rectangulaires, qui sont souvent indispensables, on peut se servir de ψ et de θ; mais pour les

obtenir directement, il suffit de tirer des équations précédentes les combinaisons $\cos\theta\cos\psi$, $\cos\theta\sin\psi$, $\sin\theta$, qui y figurent linéairement ; il vient alors

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\psi = r[\cos\Omega\cos(v+\varpi-\Omega)-\cos i\sin\Omega\sin(v+\varpi-\Omega)],\\ y &= r\cos\theta\sin\psi = r[\sin\Omega\cos(v+\varpi-\Omega)+\cos i\cos\Omega\sin(v+\varpi-\Omega)],\\ z &= r\sin\theta \qquad\quad = r[\sin i\sin(v+\varpi-\Omega)]. \end{aligned}\right.$$

On écrira plus simplement

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\alpha\sin(v+\mathrm{A}),\\ y &= r\beta\sin(v+\mathrm{B}),\\ z &= r\gamma\sin(v+\mathrm{C}), \end{aligned}\right.$$

en déterminant les six constantes α, β, γ, A, B, C par les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha\sin(\mathrm{A}+\Omega-\varpi) = \cos\Omega,\\ &\alpha\cos(\mathrm{A}+\Omega-\varpi) = -\cos i\sin\Omega,\\ &\beta\sin(\mathrm{B}+\Omega-\varpi) = \sin\Omega,\\ &\beta\cos(\mathrm{B}+\Omega-\varpi) = \cos i\cos\Omega,\\ &\gamma = \sin i, \qquad \mathrm{C} = \varpi-\Omega. \end{aligned}\right.$$

Si l'on a ainsi commencé par le calcul de x, y, z, on peut en déduire ensuite ψ et θ sans peine.

Ce mode de calcul est avantageux si l'angle v doit recevoir de nombreuses valeurs, puisque les constantes α, A,... sont alors calculées une fois pour toutes.

Les formules précédentes, qui ne dépendent aucunement de la nature de la trajectoire, fourniront les coordonnées écliptiques ou les coordonnées équatoriales, suivant que l'orbite sera rapportée à l'écliptique ou à l'équateur. Cependant, comme on donne ordinairement les éléments relatifs à l'écliptique, il peut être utile d'obtenir directement les coordonnées équatoriales, qui sont les plus employées, sans commencer par calculer les éléments relatifs à l'équateur. Supposons donc que dans ce qui précède le plan fondamental soit celui de l'écliptique, l'axe M_0x étant dirigé vers l'équinoxe de printemps ; si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées équatoriales de M, on a évidemment, en désignant par ε l'obliquité de l'écliptique, et observant que les axes M_0x et M_0x_1 coïncident,

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon, \qquad z_1 = y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon\,;$$

et par suite, on pourra écrire comme ci-dessus

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= r\alpha_1 \sin(v + A_1), \\ y_1 &= r\beta_1 \sin(v + B_1), \\ z_1 &= r\gamma_1 \sin(v + C_1), \end{aligned}\right.$$

en déterminant les six nouvelles constantes α_1, β_1, γ_1, A_1, B_1, C_1, par les relations :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 \sin(A_1 + \vartheta - \varpi) &= \cos\vartheta, \\ \alpha_1 \cos(A_1 + \vartheta - \varpi) &= -\cos i \sin\vartheta, \\ \beta_1 \sin(B_1 + \vartheta - \varpi) &= \sin\vartheta \cos\varepsilon, \\ \beta_1 \cos(B_1 + \vartheta - \varpi) &= \cos i \cos\vartheta \cos\varepsilon - \sin i \sin\varepsilon, \\ \gamma_1 \sin(C_1 + \vartheta - \varpi) &= \sin\vartheta \sin\varepsilon, \\ \gamma_1 \cos(C_1 + \vartheta - \varpi) &= \cos i \cos\vartheta \sin\varepsilon + \sin i \cos\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Pour faciliter le calcul, on peut poser

$$\left\{\begin{aligned} m \sin M &= \sin i, \\ m \cos M &= \cos i \cos\vartheta, \end{aligned}\right.$$

de façon à avoir

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 \cos(B_1 + \vartheta - \varpi) &= m \cos(M + \varepsilon), \\ \gamma_1 \cos(C_1 + \vartheta - \varpi) &= m \sin(M + \varepsilon). \end{aligned}\right.$$

Avec les valeurs des coordonnées rectangulaires équatoriales, on aura ensuite, s'il est nécessaire, les coordonnées angulaires correspondantes, ascension droite et déclinaison.

Enfin, ajoutons que si M_0 est le Soleil, il sera toujours facile de passer, par application des méthodes générales du Chapitre III, des coordonnées héliocentriques ainsi calculées aux coordonnées géocentriques, si ce sont ces dernières qui sont requises.

Exemple. — On donne

$$\begin{aligned} v &= 241°48'25'',9, & \vartheta &= 47°15'47'',6, \\ \log r &= \bar{1},6134830, & i &= 7°\ 0'11'',8, \\ & & \varpi &= 76°\ 3'20'',9; \end{aligned}$$

de plus, $\varepsilon = 23°27'10''9$.

Procédant d'une façon ou d'une autre, on trouve pour les coordonnées écliptiques

$$\lambda = 317^\circ 52' 2'',9, \qquad \beta = -7^\circ 0' 10'',4;$$

$$\log x = \bar{1},480398, \quad \log y = \bar{1},436855\,n, \quad \log z = \bar{2},699556\,n;$$

$$A = 165^\circ 50' 30'',8, \quad B = 76^\circ 16' 10'',6, \quad C = 28^\circ 47' 33'',3;$$

$$\log \alpha = \bar{1},9982515, \quad \log \beta = \bar{1},9985082, \quad \log \gamma = \bar{1},0860968.$$

De même, pour les coordonnées équatoriales

$$A_1 = 165^\circ 50' 30'',8, \quad B_1 = 78^\circ 35' 35'',1, \quad C_1 = 66^\circ 22' 2'',6;$$

$$\log \alpha_1 = \bar{1},9982515, \quad \log \beta_1 = \bar{1},9455513, \quad \log \gamma_1 = \bar{1},6806743;$$

$$\log x_1 = \bar{1},480398, \quad \log y_1 = \bar{1},363460\,n, \quad \log z_1 = \bar{1},189652\,n;$$

$$\alpha = 322^\circ 37' 19'',8 = 21^h 30^m 29^s,32, \qquad \delta = -22^\circ 8' 19'',5.$$

On constate l'exactitude du calcul en passant directement des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales, ce que nous avons précisément fait sur cet exemple au Chapitre V.

Développements en série. — Il est souvent nécessaire, en particulier dans les problèmes de la Mécanique céleste, de développer en séries convergentes les coordonnées du point M et diverses fonctions de ces coordonnées, de façon à les exprimer explicitement en fonction du temps t. Ces développements supposent essentiellement que le mouvement est elliptique, et il est facile de prévoir qu'ils seront d'autant plus convergents que l'excentricité pour les uns, l'inclinaison pour les autres, sera plus petite : ces conditions se trouvent réalisées pour les planètes en général, surtout pour les principales, et sous leur bénéfice, l'emploi des séries que nous allons établir, ou du moins indiquer sommairement, pourra bien souvent se substituer avec avantage au calcul direct.

Considérons d'abord l'anomalie excentrique u, définie par l'équation de Képler

$$u - e \sin u = M;$$

$u - M$ est une fonction périodique impaire de M qui peut évidemment se développer en série de Fourier toujours convergente, et de la forme :

$$u - M = B_1 \sin M + B_2 \sin 2M + B_3 \sin 3M + \ldots,$$

les coefficients B_i ne dépendant que de l'excentricité e; on peut d'ailleurs aisément trouver l'expression analytique générale de ces coefficients, mais cette recherche purement théorique est en dehors de notre cadre, et nous nous proposons uniquement ici d'établir pratiquement les premiers termes de quelques développements en série d'un usage constant.

Le développement précédent ne peut avoir d'utilité pratique que s'il est rapidement convergent; il est donc préférable de regarder u non pas comme une fonction de M, mais comme une fonction de e, M ayant une valeur réelle donnée.

Pour $e = 0$, on a $u = M$, et l'on peut développer u en série convergente entière ordonnée suivant les puissances de e.

Quel sera le rayon de convergence de cette série? Comme on le sait d'après un théorème général de la théorie des fonctions, ce sera le plus petit module des valeurs de e pour lesquelles la fonction u cesse d'être régulière, c'est-à-dire ici pour lesquelles l'équation de Képler a une racine double; ces valeurs sont déterminées par la relation

$$1 - e \cos u = 0,$$

jointe à l'équation elle-même.

Si donc on cherche la limite supérieure des valeurs de e qui rendent convergente la série considérée, quelle que soit la valeur réelle de M, il faudra déterminer le plus petit module des valeurs de e pour lesquelles on a simultanément

$$1 - e \cos u = 0, \qquad u - e \sin u = M,$$

ou encore

$$(a) \qquad e = \frac{1}{\cos u}, \qquad u - \operatorname{tg} u = M,$$

M étant une quantité réelle quelconque.

Ces deux équations définissent u et e comme fonctions de M, et donnent facilement en particulier

$$\frac{de}{dM} = - \frac{1}{\sin u}.$$

En faisant $i = \sqrt{-1}$, et mettant en évidence les parties réelles et imaginaires de e et u, soit

$$e = a + ib, \qquad u = \alpha + i\beta,$$

le carré du module de e est $a^2 + b^2$, et par suite, si ce module est minimum, on a la condition

$$a \frac{da}{dM} + b \frac{db}{dM} = 0,$$

ce qui revient à dire que le produit

$$(a - ib)\left(\frac{da}{dM} + i \frac{db}{dM}\right)$$

est purement imaginaire. Or ce produit n'est évidemment autre que

$$\frac{-1}{\cos(\alpha - i\beta)\sin(\alpha + i\beta)},$$

d'après ce qui précède ; ou encore

$$\frac{-2}{\sin 2\alpha + \sin 2i\beta};$$

puisqu'il doit être purement imaginaire, c'est que $\sin 2\alpha$ est nul, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha = k\pi \qquad \text{ou bien} \qquad \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

en désignant par k un entier quelconque.

Si l'on prend $\alpha = k\pi$, la seconde équation (a) donne

$$k\pi + i\beta - \operatorname{tg} i\beta = M ;$$

en observant que M est une quantité réelle, et introduisant les fonctions hyperboliques, ceci devient

$$M = k\pi, \qquad \beta = \operatorname{th} \beta ;$$

mais cette dernière équation ayant pour unique racine réelle $\beta = 0$, on a finalement

$$u = M = k\pi, \qquad e = \pm 1.$$

Si l'on prend $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$, on a de même

$$k\pi + \frac{\pi}{2} + i\beta + \operatorname{cotg} i\beta = M,$$

ou bien

$$M = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \coth \beta ;$$

cette dernière équation admet une racine réelle positive unique

$$\beta_0 = 1{,}199\ldots,$$

et l'on a finalement la solution

$$M = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad u = M \pm i\beta_0, \qquad e = \pm \frac{i}{\operatorname{sh} \beta_0} = \pm i\sqrt{\beta_0^2 - 1}.$$

En conséquence, le module minimum cherché, ou le rayon de convergence minimum de la série entière qui donne l'anomalie excentrique en fonction de l'excentricité, est égal à $\sqrt{\beta_0^2 - 1}$, ou 0,6627...(1)

Cette étude nous montre que pour toutes les planètes, on peut utiliser sans crainte les développements que nous allons établir maintenant pour u et quelques fonctions de u, sans nous occuper davantage des questions de convergence.

Pour trouver les premiers termes du développement de u suivant les puissances de e, il suffit de calculer, pour $e = 0$, les premières dérivées successives de u par rapport à e. Or, l'équation de Képler nous donne

$$\frac{du}{de}(1 - e\cos u) - \sin u = 0,$$

$$\frac{d^2u}{de^2}(1 - e\cos u) + e\sin u\left(\frac{du}{de}\right)^2 - 2\cos u\,\frac{du}{de} = 0,$$

$$\frac{d^3u}{de^3}(1 - e\cos u) + 3e\sin u\,\frac{du}{de}\,\frac{d^2u}{de^2} - 3\cos u\,\frac{d^2u}{de^2} + e\cos u\left(\frac{du}{de}\right)^3 + 3\sin u\left(\frac{du}{de}\right)^2 = 0,$$

. . . .

d'où, puisque $u = M$ pour $e = 0$,

$$\left(\frac{du}{de}\right)_0 = \sin M,$$

$$\left(\frac{d^2u}{de^2}\right)_0 = 2\sin M\cos M = \sin 2M,$$

$$\left(\frac{d^3u}{de^3}\right)_0 = 3\cos M\sin 2M - 3\sin^3 M = \frac{9}{4}\sin 3M - \frac{3}{4}\sin M,$$

. . . .

(1) Cette démonstration est due à M. J. Trousset (*Bulletin Astronomique*, tome XXVIII, 1911).

Finalement, d'après la formule de Taylor, on a pour le développement cherché :

$$u = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M\right) + \ldots\ldots$$

D'une façon générale, le coefficient de e^p est toujours de la forme

$$\alpha \sin pM + \beta \sin (p-2)M + \gamma \sin (p-4)M + \ldots\ldots,$$

α, β, γ, ... étant des coefficients numériques.

En d'autres termes encore, si l'on écrit u sous forme de série de Fourier :

$$u = M + \sin M \left(e - \frac{e^3}{8}\ldots\ldots\right) + \sin 2M \left(\frac{e^2}{2}\ldots\ldots\right) + \sin 3M \left(\frac{3e^3}{8}\ldots\ldots\right) + \ldots\ldots,$$

le coefficient de $\sin pM$ sera toujours une série ordonnée suivant les puissances de même parité de e, commençant par un terme en e^p.

Les mêmes observations s'appliquent aux développements analogues que nous allons rencontrer, les sinus pouvant se changer en cosinus, et l'inclinaison pouvant s'introduire.

Envisageons la différence $u - M$, et étudions sa variation quand M varie comme u de o à π, ce qui est suffisant, d'après les propriétés du mouvement elliptique. On a

$$\frac{d(u-M)}{dM} = \frac{e \cos u}{1 - e \cos u},$$

d'après l'équation de Képler. La différence $u - M$, toujours positive dans l'intervalle considéré, et s'annulant aux deux limites, est donc maxima pour $u = \frac{\pi}{2}$, et égale alors à e.

Le rayon vecteur r a pour valeur $a(1 - e \cos u)$; on peut donc le développer en série ordonnée suivant les puissances de e dans les mêmes conditions que u, et l'on a

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + e^3\left(\frac{3}{8} \cos M - \frac{3}{8} \cos 3M\right) + \ldots\ldots$$

Si l'on envisageait l'inverse du rayon vecteur, on aurait plus simplement

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e \cos u} = \frac{du}{dM},$$

et par suite

$$\frac{a}{r} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + e^3 \left(\frac{9}{8} \cos 3M - \frac{1}{8} \cos M\right) + \ldots.$$

L'anomalie vraie est fournie par la relation

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2};$$

faisant

$$q = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e},$$

on a, d'après une formule connue,

$$v = u + 2q \sin u + 2 \frac{q^2}{2} \sin 2u + 2 \frac{q^3}{3} \sin 3u + \ldots;$$

e étant inférieur à l'unité, on peut écrire

$$q = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} + \ldots,$$

et il vient, dans les mêmes conditions que plus haut, en remplaçant u par sa valeur en fonction de M,

$$v = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M\right) + \ldots.$$

Considérons les différences $v - u$ et $v - M$ qui, comme $u - M$, sont toujours positives quand M varie de o à π, et s'annulent aux deux limites. D'après l'équation des aires, on a

$$\frac{dv}{dM} = \frac{dv}{ndt} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2};$$

par suite

$$\frac{d(v-u)}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} - \frac{a}{r},$$

$$\frac{d(v-M)}{dM} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} - 1.$$

La différence $v - u$ est donc maxima pour $\frac{r}{a} = \sqrt{1 - e^2}$, et la différence $v - \text{M}$ l'est pour $\frac{r}{a} = \sqrt[4]{1 - e^2}$; dans le premier cas, on a alors

$$\cos u = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} = \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8} + \dots,$$

d'où

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{e}{2} - \frac{7e^3}{48} \dots,$$

$$v - u = e + \frac{7e^3}{24} \dots,$$

et il est facile de vérifier que l'on a exactement $u + v = \pi$.

Dans le deuxième cas, on a pour le maximum de $v - \text{M}$,

$$\cos u = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - e^2}}{e} = \frac{e}{4} + \dots,$$

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{e}{4} \dots, \qquad \text{M} = \frac{\pi}{2} - \frac{5e}{4} \dots,$$

$$v - \text{M} = 2e + \frac{11}{48} e^3 + \dots$$

La différence $v - \text{M}$ est ce que l'on appelle *l'équation du centre*, soit C.

Occupons-nous maintenant des coordonnées angulaires ψ et θ.

Des formules déjà écrites donnent d'abord :

$$\text{tg}(\psi - \Omega) = \cos i \,\text{tg}(v + \varpi - \Omega),$$

et par suite, d'après un développement connu,

$$\psi = v + \varpi - \text{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2(v + \varpi - \Omega) + \frac{1}{2} \text{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4(v + \varpi - \Omega) + \dots$$

Introduisons la longitude moyenne l et l'équation du centre; l'argument de la latitude $v + \varpi - \Omega$ devient $l - \Omega + \text{C}$; et en posant

$$\text{R} = -\text{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2(l - \Omega + \text{C}) + \frac{1}{2} \text{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4(l - \Omega + \text{C}) - \dots,$$

on a finalement

$$\psi = l + \text{C} + \text{R}.$$

La différence $\psi - l$ entre la longitude vraie et la longitude moyenne est donc la somme de l'équation du centre et d'une autre quantité R, dite *réduction au plan fondamental*. Cette réduction est une fonction périodique de l'argument de la latitude, et s'annule toutes les fois que celui-ci est un multiple de $\frac{\pi}{2}$, et seulement alors; elle peut se développer en série ordonnée à la fois suivant les puissances de $\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}$ et de e, procédant alors suivant les sinus des sommes des multiples des arguments $l - \varpi$ et M ou $l - \varpi$: en se bornant aux premiers termes, on a simplement :

$$R = -\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2(l - \varpi) - 2e \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin (2(l - \varpi) + M)$$
$$+ 2e \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin (2(l - \varpi) - M) + \ldots..$$

Si enfin nous voulons développer θ, nous aurons :

$$\sin \theta = \sin i \sin(l - \varpi + C),$$

d'où, en introduisant $\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}$, le développement analogue au précédent

$$\theta = 2 \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin (l - \varpi) + 2e \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin (l - \varpi + M)$$
$$- 2e \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin (l - \varpi - M) + \ldots..,$$

en nous bornant aux termes du second ordre par rapport à e et $\operatorname{tg} \frac{i}{2}$.

Les mêmes procédés s'appliqueraient au développement d'une autre fonction quelconque des coordonnées, et conduiraient à des résultats semblables.

Système solaire. — Le système solaire se compose du Soleil, des planètes et de leurs satellites, enfin des comètes. On peut, à cause de l'éloignement des étoiles, considérer ce système comme soustrait à toute action extérieure.

La masse du Soleil est beaucoup plus grande que celle des différents astres qui l'accompagnent : on la prend en général comme unité de masse.

Les planètes se distinguent en grosses planètes et petites planètes. Les premières sont au nombre de huit, savoir, en les rangeant par ordre de distance croissante au Soleil, ☉ :

Mercure, ☿, de masse $\frac{1}{6\,000\,000}$ environ ;

Vénus, ♀, de masse $\frac{1}{408\,000}$;

La Terre, ♁, avec son satellite la Lune, ☾ ; la masse du système est $\frac{1}{329\,390}$;

Mars, ♂, avec ses deux satellites, Phobos et Deimos, la masse totale étant $\frac{1}{3\,093\,500}$;

Jupiter, ♃, avec neuf satellites connus : I, Io ; II, Europe ; III, Ganymède ; IV, Callisto ; V, VI, VII, VIII, IX ; la masse du système est $\frac{1}{1047,355}$;

Saturne, ♄, avec ses anneaux, et dix satellites connus : Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypérion, Japet, Phébé, Thémis ; la masse totale est $\frac{1}{3501,6}$; l'existence de Thémis paraît incertaine.

Uranus, ♅, avec ses quatre satellites, Ariel, Umbriel, Titania, Obéron ; la masse totale est $\frac{1}{22\,869}$;

Neptune, ♆, avec son satellite, la masse totale étant $\frac{1}{19\,314}$;

Les masses des satellites sont en général négligeables devant la masse de la planète à laquelle ils appartiennent ; seule, la Lune fait exception, et sa masse vaut environ $\frac{1}{81,45}$ de celle de la Terre.

Les petites planètes connues sont de masses négligeables ; leur nombre au 1er janvier 1922 atteint près de 1 000 ; leurs orbites sont comprises entre Mars et Jupiter, avec cependant quelques très rares exceptions, savoir : la planète 433 *Eros*, qui circule entre Mars et la Terre ; et quelques planètes, dites *troyennes* (en raison de leurs noms, *Achille*, *Patrocle*, *Hector*, *Nestor*, *Priamus*, *Agamemnon*), dont les orbites ont des grands axes très voisins de celui de l'orbite de Jupiter.

Les comètes ont aussi une masse négligeable.

Il résulte de ces remarques que l'on peut regarder, en première approximation, chaque comète ou planète comme seule en présence du Soleil ; de même chaque satellite peut être considéré comme seul en présence de la planète à laquelle il appartient. De plus, la constitution de ces différents corps et la faiblesse de leurs dimensions par rapport à leurs distances permettent de les regarder comme réduits à leurs centres de gravité.

Par suite, en première approximation, le mouvement des planètes ou comètes par rapport au Soleil, de même que le mouvement des satellites par rapport aux planètes correspondantes, n'est autre que le mouvement étudié ci-dessus, dans la théorie du problème des deux corps.

Pour compléter cette première approximation, il faut ajouter que le Soleil, les grosses planètes et la Lune tournent sensiblement sur eux-mêmes autour d'axes de directions fixes, d'un mouvement uniforme.

Perturbations. — Mais si l'on ne se contente pas de cette première approximation, et qu'on veuille étudier les mouvements tels qu'ils sont, il faut tenir compte des *perturbations*, c'est-à-dire des actions qui proviennent des corps laissés primitivement de côté.

Considérons d'abord une planète ou comète M, réduite à son centre de gravité ; à un instant donné t_0, elle occupe une certaine position M_0, et sa vitesse (par rapport au Soleil) est M_0V_0. Si elle n'était soumise qu'à l'action du Soleil, elle décrirait une trajectoire, soit en général une ellipse E_0 (la parabole n'étant qu'un cas limite) qui est complètement déterminée par la connaissance de M_0 et du vecteur M_0V_0.

Si maintenant on tient compte de l'action perturbatrice des autres planètes, il est clair que la trajectoire véritable est tangente en M_0 à l'ellipse E_0 et s'éloigne progressivement, mais lentement, de cette ellipse, à mesure que le temps croît en valeur absolue.

Cette ellipse E_0 est l'*orbite osculatrice* de M au temps t_0 ; ses

éléments sont les *éléments osculateurs* de M au temps t_0 [1].

Les éléments osculateurs de l'astre M sont des fonctions du temps, qui varient lentement ; si l'on connaît cette variation, on pourra déterminer la position de M à un instant quelconque ; il suffira d'appliquer les formules du mouvement elliptique, en y considérant les éléments non plus comme constants, mais comme variables. On voit d'ailleurs, d'après la définition même des éléments osculateurs, que les fonctions des dérivées premières des coordonnées s'exprimeront encore de la même façon que dans le mouvement elliptique proprement dit, puisque l'orbite osculatrice est déterminée à chaque instant par la position de M et sa vitesse.

Sous quelle forme se présentent les éléments osculateurs de M ? Voici ce que nous enseigne à ce sujet la Mécanique céleste. Soit h un élément quelconque, ou, plus généralement, une fonction quelconque des éléments, et soit h_0 sa valeur à l'origine du temps ; on peut écrire :

$$h = h_0 + s + p - p_0 + s',$$

où voici la signification des lettres :

1° s est une somme finie de termes de la forme At^p, A étant une constante au moins de l'ordre des masses perturbatrices, p étant un entier positif : ces termes sont dits *séculaires*, et leur ensemble constitue les *perturbations* ou *inégalités séculaires* de h ;

2° p est une somme finie de termes de la forme

$$A \frac{\sin}{\cos} (\alpha t + \beta),$$

A étant une constante au moins de l'ordre des masses perturbatrices, α et β des constantes : ces termes sont dits *périodiques*, et leur ensemble constitue les *perturbations périodiques* de h ;

3° p_0 est ce que devient p pour $t = 0$;

4° s' est une somme finie de termes *mixtes*, c'est-à-dire de termes de la forme

$$At^p \frac{\sin}{\cos} (\alpha t + \beta),$$

---

(1) Le mot *osculateur* n'a pas ici le sens qu'on lui donne en géométrie : la trajectoire vraie et l'ellipse E_0 ont un simple contact du premier ordre en M_0.

les lettres conservant la même signification : leur ensemble constitue les *perturbations mixtes* de h.

Il est clair d'ailleurs que les termes séculaires étant susceptibles de grandir indéfiniment, les expressions précédentes ne peuvent être valables pour toute valeur de t; mais elles le seront pour une longue période de temps s'étendant à plusieurs siècles avant et après l'origine du temps, ce qui est largement suffisant pour la pratique actuelle de l'Astronomie, la seule chose dont nous ayons à nous occuper ici.

Nous appellerons *valeur moyenne* de h à l'époque t, l'expression de h dans laquelle on supprime les termes périodiques et les termes mixtes, de sorte que cette valeur sera $h_0 + s - p_0$. On voit immédiatement que, comme il convient, cette valeur est indépendante de l'origine du temps; car, si cette origine vient à changer, les termes périodiques restent périodiques, et les termes mixtes deviennent périodiques ou mixtes, tandis que les termes séculaires deviennent séculaires ou constants.

Considérons une fonction de h, soit $f(h)$, et faisons

$$f(h_0) = f_0.$$

On aura les perturbations de $f(h)$ en écrivant, suivant la formule de Taylor :

$$f(h) = f_0 + \frac{df_0}{dh_0}(s + p - p_0 + s') + \frac{1}{2}\frac{d^2 f_0}{dh^2_0}(s + p - p_0 + s')^2 + \ldots;$$

si d'ailleurs

$$f(h) = f_0 + \mathrm{S} + \mathrm{P} - \mathrm{P}_0 + \mathrm{S}',$$

en mettant en évidence les perturbations séculaires S, périodiques P, mixtes S′, on voit que $\mathrm{P} - \mathrm{P}_0$ n'est pas autre chose que $f(h_0 + p - p_0) - f_0$, de sorte que l'ensemble de termes $\mathrm{P} - \mathrm{P}_0$, qui ne contient pas le temps en dehors des signes périodiques correspond exactement à $p - p_0$.

La valeur moyenne de $f(h)$ est $f_0 + \mathrm{S} - \mathrm{P}_0$; on voit qu'on peut la confondre avec $f(h_0 + s - p_0)$, si l'on peut négliger les termes de l'ordre du carré de $p + s'$; dans ce cas, mais seulement alors, l'ensemble $\mathrm{S} - \mathrm{P}_0$ correspond à $s - p_0$.

Les mêmes conclusions resteraient vraies, si l'on considérait une fonction de plusieurs éléments.

Les résultats relatifs au mouvement des satellites sont analogues.

Il en est encore de même quand il s'agit de préciser le mouvement des astres sur eux-mêmes.

Unités. — On prend en général, dans l'étude du mouvement des planètes et des comètes, le jour moyen pour unité de temps ; n est donc le *moyen mouvement diurne*. Ce moyen mouvement, de même que le demi-grand axe, n'a pas d'inégalités séculaires sensibles : c'est là le célèbre théorème de l'invariabilité des grands axes.

L'unité de longueur résulte de la valeur de la constante d'attraction f; on fait, d'après Gauss,

$$\log \sqrt{f} = \bar{2},23558\,14414\,;$$

d'après la relation du mouvement elliptique

$$n = a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{f(m_0 + m)},$$

on voit alors que, la masse du Soleil m_0 étant prise comme unité, ainsi que nous l'avons déjà dit, le moyen mouvement diurne d'un corps de masse négligeable décrivant autour du Soleil un cercle dont le rayon serait l'unité de distance, aurait pour valeur $\sqrt{f}$.

La durée de sa révolution T serait donc $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$ en jours moyens ; ce qui donne

$$T = 365^{j},2568984.$$

On voit que ce temps est très voisin de celui de la Terre. Gauss a déterminé f en prenant pour unité le demi-grand axe de l'orbite terrestre : mais la masse de la Terre intervient alors, et si cette masse vient à être mieux connue, f change ; on a préféré conserver la détermination de Gauss.

S'il y a lieu de changer d'unités, on remarquera que les dimensions de f sont marquées par la relation symbolique

$$f = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

———

CHAPITRE XI

—

PRÉCESSION ET NUTATION

Déplacement des plans fondamentaux. — Le présent Chapitre a pour objet l'étude des déplacements des plans fondamentaux, c'est-à-dire des plans de l'écliptique et de l'équateur, et l'étude de l'influence de ces déplacements sur les coordonnées des astres.

Le plan de l'écliptique, ou plus simplement, l'écliptique à l'époque t, est le plan de l'orbite osculatrice de la Terre par rapport au Soleil.

L'équateur à l'époque t est de même le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation de la Terre sur elle-même. Cet axe peut être regardé comme fixe par rapport à la Terre, mais non dans l'espace, à cause de l'action du Soleil et de la Lune sur la Terre, rendue sensible par la forme ellipsoïdale de cette dernière.

Considérons la sphère céleste, et par son centre O, menons un plan fixe de trace xy, l'écliptique au temps t, de trace E, enfin l'équateur à la même époque, de trace A ; soit de plus γ_0 un point fixe de xy (*fig.* 51). Les grands cercles A et E sont supposés parcourus dans le sens direct, chacun par rapport à son pôle boréal, et il en est de même de xy par rapport à son pôle z, les points x, y, z étant les traces des axes d'un système trirectangle $Oxyz$ orienté dans le sens direct.

Si N est l'un des nœuds de E par rapport à xy, la position de E sera définie par la longitude γ_0N, ou φ, de ce nœud, comptée à partir de γ_0 dans le sens direct, et par l'inclinaison correspondante k de E sur xy.

Quant à la position de A, nous la définirons par rapport à E de la façon suivante : si γ est le nœud ascendant de E sur A, c'est-à-dire l'équinoxe de printemps, ou point vernal, ou simplement l'équinoxe, nous supposerons donnés l'arc γN, ou ω, compté à partir de γ dans le sens direct, en même temps que l'inclinaison ε de E sur A, soit l'obliquité de l'écliptique, ou simplement l'obliquité.

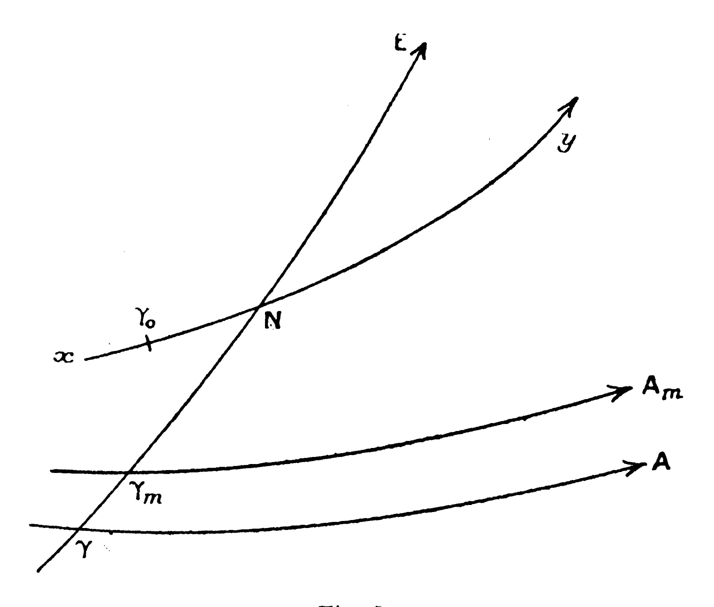


Fig. 51

Les quantités k et φ sont fournies par la théorie du mouvement de la Terre autour du Soleil, et l'on peut écrire, avec une approximation plus que suffisante, et d'après le Chapitre précédent,

$$\begin{cases} \sin k \sin \varphi = p = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \mathfrak{P}, \\ \sin k \cos \varphi = q = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \mathfrak{Q}, \end{cases}$$

$p_0, p_1, \ldots q_0, q_1, \ldots$ étant des constantes, $\mathfrak{P}$ et des $\mathfrak{Q}$ termes périodiques ou mixtes fort petits.

Si l'on fait abstraction de $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$, on définit un nouveau plan; et d'après des remarques faites précédemment, ce plan est indépendant non seulement de l'origine du temps, mais aussi du choix du plan fixe xy, puisque les termes du second ordre par rapport à $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont entièrement négligeables.

C'est à ce plan que nous réserverons dorénavant le nom d'écliptique, modifiant ainsi très légèrement la définition adoptée jusqu'ici : il en résulte en particulier que nous ne pouvons plus dire que le Soleil est rigoureusement dans l'écliptique à chaque instant, mais il aura une latitude non nulle, extrêmement petite d'ailleurs, toujours inférieure à une seconde d'arc.

La théorie du mouvement de la Terre sur elle-même fournit directement les quantités ω, ou plutôt $\omega - \varphi$, et ε, qui fixent la position de l'équateur sous la forme

$$\begin{cases} \omega - \varphi = h = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + \mathrm{P}, \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \varepsilon_3 t^3 + \mathrm{Q}, \end{cases}$$

en désignant par h_0, h_1, ... ε_0, ε_1, ... des constantes, par P, Q, des termes périodiques ou mixtes fort petits.

En faisant abstraction des termes à caractère périodique P, Q, les formules précédentes déterminent, indépendamment du choix de l'origine du temps, un plan A_m, qui est l'équateur *moyen* à l'époque t, par opposition à A, qu'il faut appeler alors l'équateur *vrai*, pour éviter toute ambiguïté ; de la même façon, le nœud ascendant γ_m de l'écliptique E sur l'équateur moyen A_m est l'équinoxe *moyen*, tandis que γ est l'équinoxe *vrai*, ou encore *apparent* ; l'inclinaison de E sur A_m est l'obliquité *moyenne*, l'expression complète de ε représentant l'obliquité *vraie* ou *apparente*.

Les coordonnées écliptiques d'un astre sont *vraies* ou *moyennes*, suivant qu'elles sont rapportées à l'équinoxe vrai ou moyen, le plan fondamental étant toujours celui de l'écliptique.

De même, les coordonnées équatoriales sont *vraies* ou *moyennes*, suivant qu'elles sont rapportées à l'équateur et à l'équinoxe vrais ou moyens. Il faudra d'ailleurs, qu'il s'agisse de coordonnées écliptiques ou équatoriales, indiquer toujours l'époque de l'équinoxe choisi.

Pour préciser les variations de l'écliptique et de l'équateur, nous supposerons que le plan fixe xy soit l'écliptique E_0 à l'origine du temps ; γ_0 sera de plus l'équinoxe moyen correspondant, et N sera le nœud ascendant ou descendant de E

sur E_0, suivant que t est positif ou négatif. Les quantités k, φ, ω, ε sont alors définies par des formules telles que

$$\begin{cases} \sin k \sin \varphi = p = p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3, \\ \sin k \cos \varphi = q = q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3, \\ \omega - \varphi = h = h_1 t + h_2 t^2 + h_3 t^3 + \mathrm{P}, \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \varepsilon_3 t^3 + \mathrm{Q}, \end{cases}$$

et la constante ε_0 est précisément l'obliquité moyenne à l'origine du temps, soit, d'après *S. Newcomb*, en prenant pour cette origine le commencement de l'année tropique 1900 (le sens exact de ce mot sera expliqué ultérieurement)

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 27' 8'',26.$$

Les coefficients p_1, q_1, ... dépendent des éléments des orbites des planètes et de leurs masses ; en prenant pour unité de temps la durée de mille années tropiques, on a effectivement

$$\begin{cases} p = 49'',64\, t + 19'',39\, t^2 - 0'',19\, t^3, \\ q = -468'',44\, t + 5'',45\, t^2 + 0'',35\, t^3. \end{cases}$$

Les coefficients h_1, ε_1, ... dépendent des précédents, des masses du Soleil et de la Lune, des éléments du mouvement de ces deux astres, ainsi que des quantités qui fixent la constitution de la Terre au point de vue mécanique ; et l'on a

$$\begin{cases} h = 50256'',41\, t + 111'',15\, t^2 + 0'',10\, t^3, \\ \varepsilon = \varepsilon_0 - 468'',44\, t - 0'',60\, t^2 + 1'',83\, t^3. \end{cases}$$

On remarquera l'égalité des coefficients ε_1 et q_1 : cette égalité résulte d'une relation que la théorie permet d'établir entre ε, ω, φ, k, et que nous indiquerons plus loin d'une façon précise.

Quant aux fonctions P, Q, elles dépendent des mêmes éléments que les coefficients précédents, et renferment un assez grand nombre de termes périodiques dont les arguments sont formés à l'aide de ceux que l'on rencontre dans la théorie du mouvement du Soleil et de la Lune autour de la Terre. Transcrivant ici les seuls termes dont le coefficient dépasse 0'',5, on a simplement

$$\begin{cases} \mathrm{P} = -(17'',234 + 0'',174\, t) \sin \Omega - 1'',272 \sin 2\mathrm{L}, \\ \mathrm{Q} = (9'',210 + 0'',009\, t) \cos \Omega + 0'',551 \cos 2\mathrm{L}, \end{cases}$$

en désignant par ☊ et L respectivement, la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, et la longitude moyenne du Soleil : ces arguments seront définis plus tard avec précision.

Précession. Nutation. — Le déplacement de l'écliptique, de l'équateur et de l'équinoxe moyens, est ce qu'on appelle d'une façon générale la *précession* : c'est un déplacement purement séculaire. Toutes les formules relatives à la précession résulteront des précédentes, où l'on supprime les parties à caractère périodique, P et Q.

La différence $\omega - \varphi$ ou h est alors la *précession générale* entre l'origine du temps et l'époque t; la valeur du coefficient h_1, réduite à l'année tropique comme unité de temps, est la *constante de la précession* (pour l'origine du temps, 1900,0), soit 50″,25641.

On passe de l'équateur et de l'équinoxe moyens à l'équateur et à l'équinoxe vrais par un nouveau déplacement appelé *nutation*, défini par les termes périodiques ou mixtes P et Q, primitivement laissés de côté : P est la *nutation de la longitude*, Q est la *nutation de l'obliquité*. Sur la figure 51, P n'est autre chose que l'arc $\gamma\gamma_m$ compté à partir de γ dans le sens direct ; Q est la différence entre l'obliquité vraie et l'obliquité moyenne.

Le coefficient de cos ☊ dans Q est ce qu'on appelle la *constante de la nutation* (pour l'époque t) ; sa valeur 9″,210 a été fixée par la Conférence de Paris (1896), d'après la théorie et les observations, pour 1900,0.

Positions relatives des plans fondamentaux à deux époques quelconques. — Il est important de savoir déterminer directement la position de l'écliptique ou de l'équateur moyen d'une époque quelconque t' par rapport à l'écliptique ou l'équateur moyen d'une autre époque t. Pour résoudre facilement et simplement cette question, et d'une façon générale, tous les problèmes relatifs de la précession, il convient de déterminer d'abord la rotation instantanée des deux trièdres trirectangles $O\gamma yz$, $O\gamma YZ$, formés par les axes des coor-

données écliptiques ou des coordonnées équatoriales moyennes, respectivement, à l'époque t; ajoutons pour préciser que z est le pôle boréal de l'écliptique E, Z le pôle boréal de l'équateur. Nous faisons d'ailleurs abstraction, dans tout ce qui suit, de la nutation, sans nous astreindre à mettre ce fait en évidence par l'écriture de γ_m, A_m, ..., au lieu de γ, A, ...

Toutes les notations précédentes étant conservées, et z_0 désignant le pôle boréal de l'écliptique E_0 de l'origine du temps, il suffit de regarder la figure 52, pour voir que la rotation

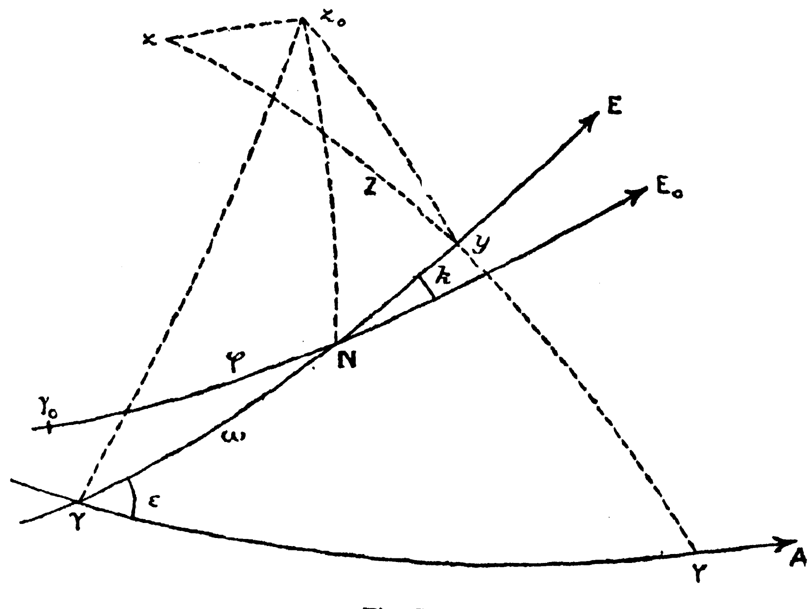


Fig 52

instantanée du trièdre $O\gamma yz$ est la résultante des trois rotations élémentaires $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de Oz_0, $\frac{dk}{dt}$ autour de ON, $-\frac{d\omega}{dt}$ autour de Oz.

Si donc nous appelons a, b, c les projections de cette rotation sur les axes $O\gamma$, Oy, Oz des coordonnées écliptiques, on aura

$$\begin{cases} a = -\sin\omega \sin k \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\omega \dfrac{dk}{dt}, \\ b = \cos\omega \sin k \dfrac{d\varphi}{dt} + \sin\omega \dfrac{dk}{dt}, \\ c = \cos k \dfrac{d\varphi}{dt} - \dfrac{d\omega}{dt}; \end{cases}$$

la figure montre en effet suffisamment quelles sont les valeurs des cosinus des angles que font les directions Oz_0, ON, Oz avec les axes $O\gamma$, Oy, Oz.

Pour obtenir maintenant la rotation instantanée du trièdre $O\gamma YZ$, il est clair qu'il faut composer avec celle de $O\gamma yz$ une nouvelle rotation élémentaire $-\frac{d\varepsilon}{dt}$ autour de $O\gamma$; et par suite, si A, B, C sont les projections de la rotation cherchée sur les axes mêmes $O\gamma$, OY, OZ, des coordonnées équatoriales, on a évidemment

$$\left\{\begin{array}{l} A = a - \frac{d\varepsilon}{dt}, \\ B = b \cos \varepsilon - c \sin \varepsilon, \\ C = b \sin \varepsilon + c \cos \varepsilon, \end{array}\right.$$

en remarquant que les axes Oy, Oz, OY, OZ sont dans un même plan perpendiculaire à $O\gamma$.

Pour calculer a, b, c, remplaçons ω par $\varphi + h$, et introduisons les quantités p et q ; on aura

$$\begin{aligned} a &= \cos h\left[-\sin\varphi \sin k\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{dk}{dt}\right] - \sin h\left[\cos\varphi \sin k\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dk}{dt}\right] \\ &= \cos h\left[\frac{dq}{dt} + q \operatorname{tg}\frac{k}{2}\frac{dk}{dt}\right] - \sin h\left[\frac{dp}{dt} + p \operatorname{tg}\frac{k}{2}\frac{dk}{dt}\right]; \end{aligned}$$

de même

$$b = \sin h\left[\frac{dq}{dt} + q \operatorname{tg}\frac{k}{2}\frac{dk}{dt}\right] + \cos h\left[\frac{dp}{dt} + p \operatorname{tg}\frac{k}{2}\frac{dk}{dt}\right],$$

et l'on voit aussi sans peine que

$$c = -\frac{dh}{dt} + \frac{1}{2}\operatorname{séc}^2\frac{k}{2}\left(p\frac{dq}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right).$$

Développons alors a, b, c en séries ordonnées suivant les puissances de t, en faisant par exemple

$$a = a_1 + a_2 t + a_3 t^2;$$

on trouve immédiatement, en particulier,

$$\begin{array}{ll} a_1 = q_1, & a_2 = 2q_2 - p_1 h_1, \ldots, \\ b_1 = p_1, & b_2 = 2p_2 + q_1 h_1, \ldots, \\ c_1 = -h_1, & c_2 = -2h_2, \ldots, \end{array}$$

sans qu'il soit nécessaire ici de détailler davantage ce calcul ; et numériquement

$$\left\{\begin{aligned} a &= -468'',44 - 1'',20\,t + 5'',49\,t^2, \\ b &= 49'',64 - 75'',36\,t + 0'',34\,t^2, \\ -c &= 50\,256'',41 + 222'',29\,t + 0'',26\,t^2. \end{aligned}\right.$$

Nous remplacerons dans la suite $-c$ par μ, et a, b par deux autres quantités ν et τ telles que

$$a = \nu \cos \tau, \qquad b = \nu \sin \tau ;$$

en faisant

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 t + \nu_3 t^2, \qquad \tau = \tau_0 + \tau_1 t + \tau_3 t^2,$$

on a

$$\nu_1 \cos \tau_0 = a_1, \qquad \nu_1 \sin \tau_0 = b_1,$$

$$\nu_2 = a_2 \cos \tau_0 + b_2 \sin \tau_0, \qquad \nu_1 \tau_1 = - a_2 \sin \tau_0 + b_2 \cos \tau_0,$$

. . . .

et

$$\left\{\begin{aligned} \nu &= 471'',07 - 6'',75t + 0'',57\,t^2, \\ \tau &= 173^\circ 57' 3'' + 32\,869''t + 56''t^2. \end{aligned}\right.$$

Envisageons maintenant la rotation des axes équatoriaux ; c'est ici que la théorie intervient pour nous apprendre que la projection A de cette rotation sur Oγ est nulle : il en résulte

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a,$$

ce qui donne immédiatement la valeur de ε transcrite plus haut, les coefficients de son développement dépendant de ceux des développements de p, q, h :

$$\varepsilon_1 = a_1 = q_1, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} a_2 = q_2 - \frac{1}{2} p_1 h_1, \ \ldots$$

Les quantités B, C sont à leur tour faciles à calculer, en remarquant que

$$\cos \varepsilon = \cos \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2} t^2\right) - \sin \varepsilon_0 (\varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2),$$

$$\sin \varepsilon = \sin \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2} t^2\right) + \cos \varepsilon_0 (\varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2),$$

et l'on obtient

$$\left\{\begin{aligned} B &= 20\,046'',85 - 85'',33\,t - 0'',37\,t^2, \\ -C &= 46\,085'',06 + 279'',45\,t + 0'',12\,t^2. \end{aligned}\right.$$

Pour nous conformer aux notations consacrées par l'usage, nous remplacerons dans la suite — C par m, B par n, en faisant comme précédemment

$$m = m_1 + m_2 t + m_3 t^2, \qquad n = n_1 + n_2 t + n_3 t^2.$$

Remarque. — Si, dans ce qui précède, on avait remplacé l'équinoxe moyen par l'équinoxe vrai, en désignant toujours de la même façon les axes écliptiques ou équatoriaux vrais qui lui sont associés, il est clair qu'il aurait fallu remplacer partout ω par $\omega + P$, ε par $\varepsilon + Q$. Dans ces conditions, en négligeant les termes du second ordre par rapport à la nutation, on voit tout de suite que les rotations $a, b, \ldots$ deviendraient $a + \delta a$, $b + \delta b, \ldots$, en faisant

$$\delta a = -bP, \qquad \delta A = -bP - \frac{dQ}{dt},$$

$$\delta b = aP, \qquad \delta B = a \cos\varepsilon \,.\, P + \sin\varepsilon \frac{dP}{dt} - CQ,$$

$$\delta c = -\frac{dP}{dt}, \qquad \delta C = a \sin\varepsilon \,.\, P - \cos\varepsilon \frac{dP}{dt} + BQ;$$

et d'après la valeur de a, et les notations introduites ci-dessus, on a encore

$$\delta B = \frac{d}{dt}(P \sin\varepsilon) + mQ, \qquad \delta C = -\frac{d}{dt}(P \cos\varepsilon) + nQ.$$

Il est facile maintenant de résoudre les problèmes dont nous avons donné l'énoncé au début de ce paragraphe.

1° Soit à déterminer la position relative des deux écliptiques E et E′ des deux époques t et t'.

Fixant cette position comme nous avons fait d'une façon générale au Chapitre III, soit I le nœud ascendant ou descendant de E′ par rapport à E, suivant que l'époque t' est postérieure ou antérieure à l'époque t; et conservant les notations déjà employées, marquons d'un accent les éléments relatifs à l'époque t'.

Il faut calculer les trois quantités (*fig.* 53)

$$\gamma I = \sigma, \qquad \gamma' I = \sigma', \qquad \widehat{EIE'} = i.$$

Regardons ici t comme fixe, et définissons le temps variable par t' ; le mouvement du trièdre $O\gamma' y' z'$ résulte évidemment des

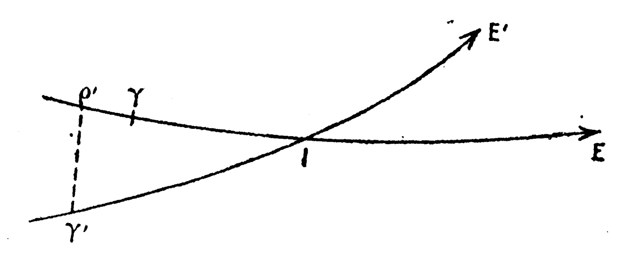


Fig. 53

rotations $\frac{d\sigma}{dt'}$, $\frac{di}{dt'}$, $-\frac{d\sigma'}{dt'}$, autour des trois axes Oz, OI, Oz' ; et par suite, on a comme plus haut

$$
\begin{aligned}
a' &= \nu' \cos \tau' = -\sin \sigma' \sin i \frac{d\sigma}{dt'} + \cos \sigma' \frac{di}{dt'}, \\
b' &= \nu' \sin \tau' = \cos \sigma' \sin i \frac{d\sigma}{dt'} + \sin \sigma' \frac{di}{dt'}, \\
c' &= -\mu' \quad = \cos i \frac{d\sigma}{dt'} - \frac{d\sigma'}{dt'};
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\sigma'}{dt'} &= \mu' + \cos i \frac{d\sigma}{dt'}, \\
\frac{di}{dt'} &= \nu' \cos (\sigma' - \tau'), \\
\sin i \frac{d\sigma}{dt'} &= -\nu' \sin (\sigma' - \tau').
\end{aligned}
\right.
$$

Ces trois équations différentielles sont propres à déterminer les inconnues σ, σ', i, à la condition de connaître leurs valeurs initiales pour l'époque t.

Or, il est clair que pour $t' = t$, on a d'abord $i = 0$, $\sigma' = \sigma$, et la troisième équation montre ensuite que l'on a aussi $\sigma' = \tau$, puisque τ' devient τ pour $t' = t$.

Développant alors les inconnues en séries ordonnées suivant les puissances de $t' - t$, et marquant de l'indice o leurs déri-

vées successives, quand on y fait $t' = t$, on aura

$$\sigma = \tau + \left(\frac{d\sigma}{dt'}\right)_0 (t' - t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sigma}{dt'^2}\right)_0 (t' - t)^2 + \ldots,$$

$$\sigma' - \sigma = \left(\frac{d\sigma' - d\sigma}{dt'}\right)_0 (t' - t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sigma' - d^2\sigma}{dt'^2}\right)_0 (t' - t)^2 + \ldots,$$

$$i = \left(\frac{di}{dt'}\right)_0 (t' - t) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 i}{dt'^2}\right)_0 (t' - t)^2 + \ldots$$

Les coefficients de ces développements résulteront des équations différentielles elles-mêmes ; on a directement

$$\left(\frac{d\sigma' - d\sigma}{dt'}\right)_0 = \mu, \qquad \left(\frac{di}{dt'}\right)_0 = \nu;$$

puis, en les différentiant une fois, il viendra

$$\left(\frac{d^2\sigma' - d^2\sigma}{dt'^2}\right)_0 = \frac{d\mu}{dt}, \qquad \left(\frac{d^2 i}{dt'^2}\right)_0 = \frac{d\nu}{dt}, \qquad \left(\frac{d\sigma}{dt'}\right)_0 = -\left(\frac{d\sigma'}{dt'}\right)_0 + \frac{d\tau}{dt},$$

et par suite

$$\left(\frac{d\sigma}{dt'}\right)_0 = -\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\frac{d\tau}{dt};$$

et ainsi de suite.

Finalement, on aura donc

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= 173^\circ 57' 3'' + 32\,869'' t + 56'' t^2 \\ &\qquad + (-8\,694'' - 55'' t)(t' - t) + 3''(t' - t)^2, \\ \sigma' - \sigma &= (50\,256'',41 + 222'',29\, t + 0'',26\, t^2)(t' - t) \\ &\qquad + (111'',15 + 0'',26\, t)(t' - t)^2 + 0'',10(t' - t)^3, \\ i &= (471'',07 - 6'',75\, t + 0'',57\, t^2)(t' - t) \\ &\qquad + (-3'',37 + 0'',57\, t)(t' - t)^2 + 0'',05\,(t' - t)^3. \end{aligned}\right.$$

Ainsi qu'il était évident *a priori*, les quantités

$$\sigma + \sigma', \qquad \frac{\sigma' - \sigma}{t' - t}, \qquad \frac{i}{t' - t},$$

sont symétriques par rapport à t et t'.

2° Nous pouvons procéder exactement de la même façon pour déterminer la position relative des deux équateurs A et A′ des époques t et t'.

Si I_1 est le nœud ascendant ou descendant, suivant le cas, de A′ sur A (*fig.* 54), et si l'on fait

$$\gamma I_1 = \sigma_1, \quad \gamma' I_1 = \sigma_1', \quad A\widehat{I_1}A' = i_1,$$

tout ce que nous venons de dire peut être répété, en affectant de l'indice 1 les éléments relatifs à l'équateur, et remplaçant μ, ν, τ par m, n, $\frac{\pi}{2}$, respectivement.

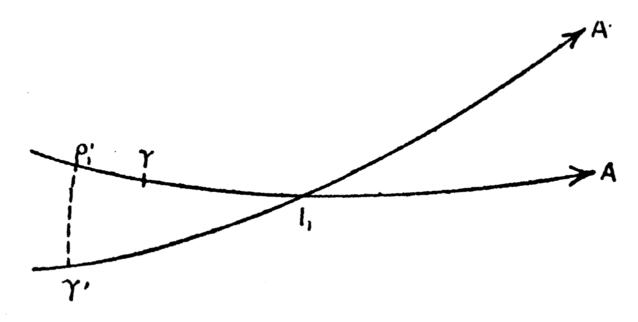


Fig. 54

Les équations du mouvement du trièdre $O\gamma Y'Z'$ seront

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\sigma_1'}{dt'} &= m' + \cos i_1 \frac{d\sigma_1}{dt'}, \\ \frac{di_1}{dt'} &= n' \sin \sigma_1', \\ \sin i_1 \frac{d\sigma_1}{dt'} &= n' \cos \sigma_1' ; \end{aligned}\right.$$

et l'on obtiendra de la même façon

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_1 &= 90^\circ + (-23\,042'',53 - 139'',73\,t - 0'',06\,t^2)(t' - t) \\ &\quad + (-30'',23 + 0'',27\,t)(t' - t)^2 - 18'',00\,(t' - t)^3, \\ \sigma_1' - \sigma_1 &= (46\,085'',06 + 279''.45\,t + 0'',12\,t^2)(t' - t) \\ &\quad + (139'',73 + 0'',12\,t)(t' - t)^2 + 36'',32\,(t' - t)^3, \\ i_1 &= (20\,046'',85 - 85'',33\,t - 0'',37\,t^2)(t' - t) \\ &\quad + (-42'',67 - 0'',37\,t)(t' - t)^2 - 41'',80\,(t' - t)^3. \end{aligned}\right.$$

On n'oubliera pas que le coefficient de $t' - t$ dans σ_1 est exactement la moitié changée de signe du coefficient analogue dans $\sigma_1' - \sigma_1$.

3° Proposons-nous encore de déterminer la position relative

de l'équateur A' de l'époque t' et de l'écliptique E de l'époque t.

Soit J le nœud ascendant de E sur A' (*fig.* 55), et faisons

$$J\gamma = \psi, \quad J\gamma' = \chi, \quad \widehat{A'JE} = \theta.$$

Il est clair que les équations du mouvement du trièdre $O\gamma Y'Z'$ sont les mêmes que ci-dessus, à la condition de rem-

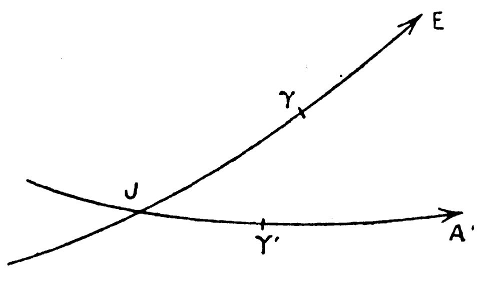


Fig. 55

placer σ_1 par $-\psi$, i_1 par $-\theta$, σ_1' par $-\chi$; elles deviennent donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt'} &= -m' + \cos\theta \frac{d\psi}{dt'}, \\ \frac{d\theta}{dt'} &= n' \sin\chi, \\ \sin\theta \frac{d\psi}{dt'} &= n' \cos\chi; \end{aligned}\right.$$

et de plus, pour $t' = t$, on a $\psi = \chi = 0$, et $\theta = \varepsilon$.

En développant les inconnues toujours de la même façon, on a

$$\left(\frac{d\psi}{dt'}\right)_0 = \frac{n}{\sin\varepsilon}, \quad \left(\frac{d\chi}{dt'}\right)_0 = -m + n \operatorname{cotg}\varepsilon, \quad \left(\frac{d\theta}{dt'}\right)_0 = 0, \ldots,$$

et finalement

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= (5037''{,}84 + 49''{,}30\,t - 0''{,}04\,t^2)(t' - t) \\ &\qquad + (-107''{,}20 - 1''{,}48\,t)(t' - t)^2 - 1''{,}53\,(t' - t)^3, \\ \chi &= (124''{,}73 - 188''{,}70\,t - 0''{,}14\,t^2)(t' - t) \\ &\qquad + (-238''{,}07 - 1''{,}57\,t)(t' - t)^2 - 1''{,}66\,(t' - t)^3, \\ \theta &= 23°27'8''{,}26 - 468''{,}44\,t - 0''{,}60\,t^2 + 1''{,}83\,t^3 \\ &\qquad + (6''{,}06 - 9''{,}20\,t)(t' - t)^2 - 7''{,}73\,(t' - t)^3; \end{aligned}\right.$$

on remarquera l'absence du terme en $t' - t$ dans l'expression de θ.

Les arcs ψ et χ sont respectivement la précession *luni-solaire* et la *précession planétaire* entre les époques t et t' : ces dénominations s'expliquent d'elles-mêmes, puisque, si l'on supprimait l'action des planètes, l'écliptique serait fixe, et le point γ' viendrait en J, son déplacement étant dû uniquement à l'action de la Lune et du Soleil sur la Terre.

Représentation géométrique de la précession et de la nutation. — On peut se représenter d'une façon simple les phénomènes de précession et de nutation en étudiant le mouvement sur la sphère céleste des pôles de l'écliptique et de l'équateur, ainsi que celui de l'équinoxe.

Considérons d'abord le pôle z' de l'écliptique E′, en conservant toujours les mêmes notations ; sa longitude et sa latitude, rapportées aux axes de l'époque t, sont respectivement $\sigma - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - i$; par suite, ce point reste toujours très voisin du pôle fixe z de E, si du moins l'intervalle de temps $t' - t$ ne dépasse pas deux ou trois milliers d'années (et, en réalité, la façon même dont on obtient les données numériques relatives à la précession ne permet d'aller aussi loin qu'avec une certaine perte de précision). En supposant $t = 0$ (soit l'époque 1900,0) comme nous continuerons à le faire dans les cas semblables, le petit arc $z'z$ tourne de 14′,5 environ par siècle, dans le sens rétrograde, en même temps que sa longueur augmente de 47″.

Envisageons maintenant le mouvement de l'équinoxe γ' rapporté aux mêmes axes, c'est-à-dire à l'écliptique E et à l'équinoxe γ. Pour déterminer sa longitude λ et sa latitude β, menons l'arc de grand cercle $\gamma'\rho'$ perpendiculaire sur E (*fig.* 53) ; le triangle rectangle $\gamma'\rho'$I donne les relations

$$\operatorname{tg}(\sigma - \lambda) = \cos i \operatorname{tg} \sigma', \qquad \sin \beta = - \sin i \sin \sigma' ;$$

la latitude β reste donc toujours très petite, d'autant plus que l'angle σ' est assez voisin de π ; et, en raison de la petitesse de i, on a, avec une grande précision,

$$\widehat{\rho'\gamma} = - \lambda = \sigma' - \sigma.$$

Le point ρ' rétrograde donc sur l'écliptique E avec une vitesse très sensiblement uniforme de 50",26 par an ; de sorte que le Soleil décrivant l'écliptique dans le sens direct, revient à l'équinoxe avant d'avoir achevé sa révolution sidérale ; c'est-à-dire qu'il y a *précession de l'équinoxe* dans le temps. On voit aussi pourquoi l'angle $\sigma' - \sigma$ est la *précession générale* entre les époques t et t' ; pour préciser, il conviendrait d'ailleurs de dire plutôt *précession générale en longitude*.

Un raisonnement semblable au précédent, montre que si l'on appelle α, δ l'ascension droite et la déclinaison de l'équinoxe γ' par rapport aux axes équatoriaux de l'époque t, on a

$$\operatorname{tg}(\sigma_1 - \alpha) = \cos i_1 \operatorname{tg} \sigma_1', \qquad \sin \delta = - \sin i_1 \sin \sigma_1' ;$$

et comme l'angle σ_1' reste voisin de 90°, on a ici encore avec une exactitude suffisante, mais qui diminue quand l'intervalle de temps $t' - t$ augmente,

$$\alpha = - (\sigma_1' - \sigma_1), \qquad \delta = - i_1.$$

Si l'on mène l'arc de grand cercle $\gamma'\rho_1'$ perpendiculaire sur A (*fig.* 54), le point ρ'_1 rétrograde de 46",09 ou 3ˢ,072 environ par an (en faisant encore $t = 0$), tandis que l'arc $\rho_1'\gamma'$ augmente en même temps de 20",05. Les quantités $\sigma_1' - \sigma_1$ et i_1 sont les précessions générales en ascension droite et en déclinaisons entre les époques t et t'.

S'il s'agit enfin du pôle Z' de l'équateur A', il est clair que sa longitude et sa latitude par rapport aux axes écliptiques de l'époque t sont respectivement $\frac{\pi}{2} - \psi$, $\frac{\pi}{2} - \theta$; cette dernière quantité peut être regardée comme une constante, avec une très grande exactitude, et par suite, le point Z' reste sur un petit cercle de pôle z, dont le rayon sphérique est égal à ε_0 (toujours avec l'hypothèse $t = 0$) ; et d'après la valeur de ψ, il décrit ce petit cercle d'un mouvement rétrograde sensiblement uniforme, sa longitude diminuant de 50",37 environ par an.

Il nous reste à dire quel est l'effet de la nutation : nous bornerons d'ailleurs ici les deux fonctions P et Q à leurs premiers termes — 17",23 sin ☊ et 9",21 cos ☊ respectivement, en obser-

vant que l'angle ☊ varie proportionnellement au temps, et et diminue de 2π en 18 ans $\frac{2}{3}$ environ.

Par rapport à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de l'époque t, l'équinoxe vrai a une latitude nulle et une longitude égale à $-P$ (*fig.* 51) : il est animé, dans cette écliptique même, d'un mouvement oscillatoire autour de sa position moyenne, de période 18 ans $\frac{2}{3}$, d'amplitude égale à $17'',23$.

Par rapport à l'équateur et à l'équinoxe moyens de l'époque t, l'ascension droite et la déclinaison de l'équinoxe vrai sont respectivement $-P\cos\varepsilon$, $-P\sin\varepsilon$.

Si enfin nous rapportons les pôles Z, Z_m de l'équateur vrai et de l'équateur moyen à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de la même époque t, il est clair que la longitude et la latitude de Z_m sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ (ε ayant encore ici sa valeur moyenne), tandis que la longitude et la latitude de Z sont $\frac{\pi}{2}-P$ et $\frac{\pi}{2}-\varepsilon-Q$. Si donc nous menons dans le plan tangent à la sphère céleste en Z_m deux axes $Z_m\xi$, $Z_m\eta$, orientés comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, le premier suivant la tangente au cercle de latitude dans le sens direct, le second suivant la tangente au grand cercle zZ_m vers le pôle z de E, les coordonnées du point Z par rapport à ces axes seront (*fig.* 56)

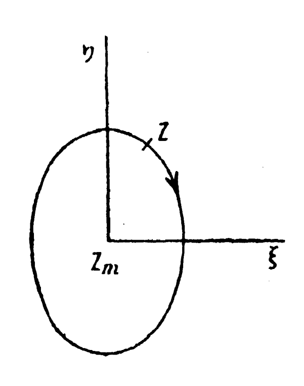


Fig. 56

$$\xi = -P\sin\varepsilon = 6'',86 \sin ☊,$$
$$\eta = -Q = -9'',21 \cos ☊;$$

le pôle Z décrit donc autour de sa position moyenne Z_m, en 18 ans $\frac{2}{3}$, une petite ellipse, dont le demi-grand axe, dirigé suivant $Z_m\eta$, a pour valeur $9'',21$, tandis que le demi-petit axe, dirigé suivant $Z_m\xi$, est égal à $6'',86$. Le mouvement est d'ailleurs rétrograde.

Transformation des coordonnées moyennes. — Il est facile, à l'aide des résultats obtenus précédemment, de passer des coordonnées moyennes d'un point de la sphère céleste à l'époque t, aux coordonnées de même nom à l'époque t'. On pourra appliquer en effet à ce problème toutes les formules développées au Chapitre III, relatives au changement de coordonnées (l'origine restant la même), et spécialement les formules (24), (25), (26) qui conviennent au cas où l'angle i est petit : les changements de notations nécessaires sont en évidence. De la même façon, on pourra transformer les éléments d'une orbite et les rapporter à l'écliptique ou à l'équateur d'une nouvelle époque : il suffira d'appliquer les formules que nous venons de rappeler à la transformation des coordonnées du pôle de l'orbite qui sont $\varpi - \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - j$, d'après les notations générales du Chapitre III ; et, gardant ces mêmes notations, on achèvera le calcul à l'aide de la quatrième équation (29), soit

$$\sin j' \sin(\omega - \omega') = \sin i \sin(\varpi - \sigma).$$

Arrêtons nous sur le problème de la transformation des coordonnées équatoriales, qui se présente à chaque instant dans la pratique de l'Astronomie. Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\sigma_1' - \sigma_1 = \zeta, \qquad \sigma_1 = 90° - \zeta_1 ;$$

on sait d'ailleurs que

$$\zeta_1 = \frac{\zeta}{2} - (39'',64 + 0'',33t)(t' - t)^2 - 0'',16(t' - t)^3,$$

de sorte qu'on pourra prendre simplement $\zeta_1 = \frac{\zeta}{2}$ dans presque tous les cas.

La solution générale est donnée par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \sin\omega &= \sin i_1 \sin(\alpha + \zeta_1), \\ \operatorname{tg}\varphi &= \operatorname{tg} i_1 \cos(\alpha + \zeta_1), \\ \operatorname{tg}\rho &= \sin\omega \operatorname{tg}(\delta + \varphi), \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \zeta - \rho) &= -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' - \delta - \varphi) &= -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}. \end{aligned}\right.$$

Mais, généralement, l'angle i_1 est assez petit pour qu'on puisse le confondre avec son sinus et sa tangente, et il en est de même alors des angles φ, ω, $\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \zeta - \rho)$, et aussi $\frac{1}{2}(\delta' - \delta - \varphi)$, puisqu'on a choisi ρ inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue; quant à l'angle ρ, il peut grandir beaucoup si la déclinaison δ se rapproche de $\pm\frac{\pi}{2}$, mais, dans les cas les plus fréquents, on pourra aussi le confondre avec sa tangente, et même s'il n'en est pas absolument ainsi, on pourra souvent agir de cette façon avec l'angle $\frac{\rho}{2}$ qui figure dans la dernière des formules ci-dessus, en raison de la petitesse de ω.

En mettant en évidence les diverses simplifications possibles, et réservant leur choix à l'usage, on a le tableau complet

$$(a)\left\{\begin{array}{l}
\sin\omega = \sin i_1 \sin(\alpha + \zeta_1), \quad \text{ou} \quad \omega = i_1 \sin(\alpha + \zeta_1),\\
\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} i_1 \cos(\alpha + \zeta_1), \quad \text{ou} \quad \varphi = i_1 \cos(\alpha + \zeta_1),\\
\operatorname{tg}\rho = \sin\omega \operatorname{tg}(\delta + \varphi), \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\rho = \omega \operatorname{tg}(\delta + \varphi), \quad \text{ou} \quad \rho = \omega \operatorname{tg}(\delta + \varphi),\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha - \zeta - \rho) = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \text{ou} \quad \alpha' = \alpha + \zeta + \rho - \frac{1}{2}\omega\varphi,\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\delta' - \delta - \varphi) = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\rho}{2}, \text{ou } \delta' = \delta + \varphi - \omega \operatorname{tg}\frac{\rho}{2}, \text{ou } \delta' = \delta + \varphi - \frac{1}{2}\omega\rho.
\end{array}\right.$$

Si l'on prenait uniquement, par une nouvelle simplification à peine sensible,

$$(b) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\alpha' = \alpha + \zeta + i_1 \operatorname{tg}\delta \sin(\alpha + \zeta_1),\\
\delta' = \delta + i_1 \cos(\alpha + \zeta_1),
\end{array}\right.$$

cela reviendrait à faire usage des formules différentielles (25) du Chapitre III.

Dans la pratique, lorsque l'intervalle de temps $t' - t$ reste d'une médiocre grandeur, on procède encore souvent d'une autre façon, en appliquant la méthode des développements en série; mais cette méthode tombe en défaut quand le point dont on transforme les coordonnées se rapproche de l'un des pôles, et de plus, elle ne laisse pas d'entraîner quelque incertitude : l'usage des formules (a) au contraire ne souffre ni exception, ni incertitude, et ne demande d'ailleurs pas plus de peine.

Soit S un point *fixe* de la sphère céleste dont λ et β seront la longitude et la latitude par rapport à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de l'époque t : λ et β seront des fonctions de t. Faisons pour un instant

$$x = \cos\beta\cos\lambda, \qquad y = \cos\beta\sin\lambda, \qquad z = \sin\beta,$$

de sorte que x, y, z sont les coordonnées de S par rapport aux axes mobiles $Oxyz$. D'après les formules élémentaires de la cinématique, les projections de la vitesse absolue de S sur ces axes mobiles sont

$$\frac{dx}{dt} + bz - cy,$$
$$\frac{dy}{dt} + cx - az,$$
$$\frac{dz}{dt} + ay - bx;$$

égalant ces quantités à zéro, puisque le point S est fixe, et mettant pour a, b, c leurs valeurs, il vient

$$\frac{d(\cos\beta\cos\lambda)}{dt} + \nu\sin\tau\sin\beta + \mu\cos\beta\sin\lambda = 0,$$
$$\frac{d(\cos\beta\sin\lambda)}{dt} - \nu\cos\tau\sin\beta - \mu\cos\beta\cos\lambda = 0,$$
$$\frac{d(\sin\beta)}{dt} + \nu\cos\tau\cos\beta\sin\lambda - \nu\sin\tau\cos\beta\cos\lambda = 0,$$

ou bien

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \mu + \nu\,\mathrm{tg}\,\beta\cos(\lambda - \tau), \\ \dfrac{d\beta}{dt} = -\nu\sin(\lambda - \tau). \end{cases}$$

Si l'on fait le même calcul pour l'ascension droite α et la déclinaison δ du point S, par rapport aux axes équatoriaux moyens de l'époque t, on a de même, en remplaçant μ, ν, τ par m, n, $\frac{\pi}{2}$,

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = m + n\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\alpha, \\ \dfrac{d\delta}{dt} = n\cos\alpha. \end{cases}$$

Ces formules (c) et (d) sont fondamentales : on les retrouve d'ailleurs aisément comme conséquence des formules générales que nous venons de développer ci-dessus. On a en effet, par exemple, en supposant $t' - t$ infiniment petit,

$$\zeta = m(t' - t), \qquad i_1 = n(t' - t), \qquad \zeta_1 = 0,$$

et par les formules (b) :

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha)(t' - t), \\ \delta' - \delta = n \cos \alpha \, (t' - t). \end{cases}$$

En différentiant les équations (c) et (d), on obtiendra les valeurs des dérivées successives de λ, β, α, δ par rapport au temps t.

Si l'on appelle λ_k, par exemple, la dérivée d'ordre k de λ, et qu'on désigne par λ' ce que devient λ pour l'époque quelconque t', on aura donc les développements

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda + \lambda_1 (t' - t) + \frac{\lambda_2}{2}(t' - t)^2 + \frac{\lambda_3}{6}(t' - t)^3, \\ \beta' = \beta + \beta_1 (t' - t) + \frac{\beta_2}{2}(t' - t)^2 + \frac{\beta_3}{6}(t' - t)^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + \alpha_1 (t' - t) + \frac{\alpha_2}{2}(t' - t)^2 + \frac{\alpha_3}{6}(t' - t)^3, \\ \delta' = \delta + \delta_1 (t' - t) + \frac{\delta_2}{2}(t' - t)^2 + \frac{\delta_3}{6}(t' - t)^3, \end{cases}$$

les expressions précédemment calculées des éléments μ, ν, τ, m, n, ne permettant pas d'aller plus loin.

Les coefficients λ_1, β_1, α_1, δ_1, sont les seconds membres mêmes des équations (c) et (d) ; si on les rapporte à l'année tropique comme unité de temps, c'est-à-dire si on les divise par 1 000, en conservant toujours l'unité de temps précédemment adoptée, ils deviennent p_λ, p_β, ... et sont les *précessions annuelles* en longitude, en latitude, en ascension droite et en déclinaison, pour le point S considéré de la sphère céleste, à l'époque t.

Les coefficients λ_2, β_2, α_2, δ_2, divisés par 10 000, sont les *variations séculaires* pour les coordonnées correspondantes, soit s_λ, s_β, ... : on voit que s_λ, par exemple, est la dérivée

de p_λ par rapport au temps, quand on prend le siècle pour unité.

Bornons-nous à calculer α_2, δ_2; on aura, en différentiant les formules (d) et tenant compte des valeurs de α_1, δ_1,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{dm}{dt} + \operatorname{tg}\delta \sin\alpha \frac{dn}{dt} + mn \operatorname{tg}\delta \cos\alpha + n^2 \sin\alpha \cos\alpha (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \delta), \\ \delta_2 = \frac{dn}{dt} \cos\alpha - mn \sin\alpha - n^2 \operatorname{tg}\delta \sin^2\alpha, \end{array}\right.$$

et ceci suffit à faire voir que l'emploi des formules précédentes n'est pas très recommandable, à moins de trouver toutes calculées à l'avance les variations séculaires.

Le plus souvent, on évite l'usage des variations séculaires par l'artifice suivant, qui suppose essentiellement les termes du troisième ordre par rapport à $t' - t$ négligeables. Ecrivons par exemple

$$\alpha' - \alpha = \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2(t' - t)\right)(t' - t),$$

et remarquons que $\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2(t' - t)$ n'est autre chose que la valeur α_1'' que prend α_1 pour l'époque $t'' = \frac{1}{2}(t' + t)$, en négligeant des termes du second ordre qui ne produiraient dans $\alpha' - \alpha$ que des termes du troisième ordre. On a donc simplement

$$\alpha' - \alpha = \alpha_1''(t' - t),$$

et tout revient à calculer α_1''. Pour obtenir cette quantité, il faut connaître α'', δ'', coordonnées moyennes à l'époque t''; mais, comme précédemment, on peut se borner à prendre

$$\alpha'' = \alpha + \alpha_1(t'' - t), \qquad \delta'' = \delta + \delta_1(t'' - t);$$

on commet ainsi, dans ces quantités, une erreur du second ordre, qui ne produit dans $\alpha' - \alpha$ qu'une erreur du troisième ordre, négligeable par hypothèse.

En résumé donc, 1° on cherchera la précession annuelle pour l'époque t, et l'on en déduira des valeurs approchées des coordonnées pour l'époque t''; 2° on cherchera la précession annuelle pour l'époque t'', et l'on en déduira les valeurs des

coordonnées pour l'époque t'; et de cette façon, on ne néglige que des termes du troisième ordre.

Il est clair que ce procédé sera inapplicable si le point S est voisin de l'un des pôles du système de coordonnées employé : les développements en série cessent alors d'être convergents, en raison de la présence du facteur tg δ, à des puissances de plus en plus élevées, dans les coefficients α_k, δ_k. Il ne faudra pas non plus l'appliquer quand $t' - t$ sera grand, et qu'on voudra avoir une grande précision : il est facile de voir en effet que les séries qui représentent les coordonnées sont moins convergentes que celles qui définissent la position des plans fondamentaux, surtout quand il s'agit des coordonnées équatoriales. Enfin, il est visible qu'en suivant cette méthode, très usuelle à la vérité, l'appréciation exacte de l'erreur commise devient difficile.

Quelle que soit d'ailleurs la méthode suivie, des tables appropriées en faciliteront grandement l'application.

Exemples. — Voici quelques exemples de calculs de précession.

1° On donne pour 1875,0

$$\alpha = 11^h 45^m 58^s{,}080, \qquad \delta = 38°33'33'',22\,;$$

calculer α', δ' pour 1910,0 (S. Newcomb, *Spherical astronomy*).

On a $t' = 0{,}010$, $t = -0{,}025$, d'où

$$\zeta = 2\zeta_1 = 1^m 47^s{,}527, \qquad i_1 = 701'',66.$$

En employant les formules (a) sous leur forme la plus réduite, on a

$$\varphi = -11'40'',51, \qquad \log\omega = 1{,}60419, \qquad \rho = 31'',82,$$

(ω étant exprimé en secondes d'arc). Par suite

$$\alpha' = \alpha + \zeta + 2^s{,}121 + 0^s{,}005 = 11^h 47^m 47^s{,}733,$$
$$\delta' = \delta + \varphi + 0'',00 = 38°21'52'',71.$$

Appliquons maintenant la méthode des développements en série; pour 1875,0, on a

$$m = 46078'',07, \quad n = 20048'',98, \quad \frac{dm}{dt} = 279'',44, \quad \frac{dn}{dt} = -85'',31\,;$$

les précessions annuelles et les variations séculaires sont par suite

$$p_\alpha = 3^s,13706,\ p_\delta = -20'',0115,\ s_\alpha = -0^s,0237,\ s_\delta = -0'',0195.$$

Donc

$$\alpha' = \alpha + 35\left(p_\alpha + \frac{35}{200}s_\alpha\right) = \alpha + 35 \times 3^s,13291 = 11^h47^m47^s,732,$$

$$\delta' = \delta + 35\left(p_\delta + \frac{35}{200}s_\delta\right) = \delta + 35 \times (-20'',0149) = 38°21'52'',70.$$

Si enfin on veut employer la méthode usuelle, on aura d'abord, à l'aide des valeurs p_α, p_δ ci-dessus,

$$\alpha'' = 11^h46^m52^s,98, \qquad \delta'' = 38°27'43'',0,$$

pour les coordonnées à l'époque moyenne t'', ou 1892,5.

Pour cette époque, on a aussi

$$m = 46\,082'',96, \qquad n = 20\,047'',49;$$

les nouvelles précessions annuelles sont alors $3^s,13292$ et $-20'',0148$; le calcul s'achève comme ci-dessus, et donne les mêmes résultats.

2°. On donne pour 1900,0

$$\alpha = 1^h22^m36^s,46, \qquad \delta = 88°46'26'',69;$$

calculer α', δ' pour 1924,0.

On a ici

$$\zeta = 2\zeta_1 = 73^s,74, \qquad \iota_1 = 481'',10,$$

et les formules (a) conviennent encore sous la forme la plus réduite, sauf qu'on déterminera ρ en prenant

$$\operatorname{tg} \rho = \omega \operatorname{tg}(\delta + \varphi).$$

On trouve d'abord

$$\varphi = 7'29'',73, \qquad \log \omega = 2,232705, \qquad \rho = 2°28'6'',3,$$

(ω étant exprimé en secondes d'arc). Par suite

$$\alpha' = \alpha + \zeta + 592^s,42 - 0^s,01 = 1^h33^m42^s,61,$$
$$\delta' = \delta + \varphi - 3'',68 = 88°53'52'',74.$$

3° On donne encore pour 1900,0

$$\alpha = 1^h23^m0^s,47, \qquad \delta = 88°46'27'',27;$$

calculer α', δ' pour 2100,0 (S. NEWCOMB, *Spherical Astronomy*).

Ici

$$\zeta = 10^m 14^s,86, \quad \zeta_1 = 5^m 7^s,32, \quad i_1 = 1^\circ 6' 47'',33,$$

et si l'on veut obtenir le maximum de précision, il faut faire usage des formules (a) sous la forme rigoureuse, sauf pour le calcul de α'. On a ainsi

$$\varphi = 1^\circ 1' 54'',75, \quad \log \sin \omega = \bar{3},862587, \quad \rho = 65^\circ 5' 33'',6;$$

$$\alpha' = \alpha + \zeta + 4^h 20^m 22^s,24 - 0^s,90 = 5^h 53^m 36^s,67,$$

$$\delta' = \delta + \varphi - 15' 59'',35 = 89^\circ 32' 22'',67.$$

Bien entendu, la précision pour α' est illusoire ; une très petite variation donnée à i_1 se reproduit sur ρ multipliée par un facteur supérieur à 100.

4° On donne pour l'époque 1862,0, les éléments d'une orbite rapportés à l'écliptique, savoir

$$\Omega = 137^\circ 27' 10'',0, \quad j = 113^\circ 34' 12'',2, \quad \varpi = 290^\circ 12' 47'',8.$$

Calculer les éléments de la même orbite rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyen de 2012,0 (TH. V. OPPOLZER, *Bahnbestimmung*).

On a ici

$$\sigma = 173^\circ 14',5, \quad i = 70'',6, \quad \sigma' - \sigma = 2^\circ 5' 39'',7;$$

la petitesse de i permet d'employer les formules différentielles

$$d(\Omega - \sigma) = i \operatorname{cotg} j \sin(\Omega - \sigma),$$

$$dj = -i \cos(\Omega - \sigma),$$

$$d(\varpi - \Omega) = -i \operatorname{cos\acute{e}c} j \sin(\Omega - \sigma),$$

et l'on trouve

$$d(\Omega - \sigma) = 18'',0, \quad dj = -57'',3, \quad d(\varpi - \Omega) = 45'',0;$$

d'où

$$\Omega' = 139^\circ 33' 7'',7, \quad j' = 113^\circ 33' 14'',9, \quad \varpi' = 292^\circ 19' 30'',5.$$

Observons que, presque toujours, on pourra se borner de même à l'usage de formules différentielles, lorsqu'on emploie les coordonnées écliptiques, à cause de la petitesse du coefficient de $t' - t$ dans l'expression générale de i.

Passage des coordonnées moyennes aux coordonnées vraies. — Il est facile maintenant de passer des coordonnées moyennes à une époque t aux coordonnées vraies à la même époque. Si d'abord il s'agit des coordonnées écliptiques, et si les lettres accentuées et non accentuées désignent respectivement les coordonnées vraies et moyennes, on a immédiatement

$$\lambda' = \lambda + P, \qquad \beta' = \beta,$$

P étant la nutation de la longitude ; la nutation en effet ne change pas l'écliptique, mais seulement l'équinoxe.

Si maintenant il s'agit des coordonnées équatoriales, on trouvera les très petites différences $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$, en appliquant les formules différentielles relatives au passage des coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales, où l'on fera

$$d\lambda = P, \qquad d\beta = 0, \qquad d\varepsilon = Q,$$

Q étant la nutation de l'obliquité ε. Si donc S désigne l'angle à l'astre, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \cos\delta\,.\,(\alpha' - \alpha) &= \cos S \cos\beta\,.\,P - \sin\delta\cos\alpha\,.\,Q,\\ \delta' - \delta &= \sin S\cos\beta\,.\,P + \sin\alpha\,.\,Q,\end{aligned}\right.$$

d'après les formules (17) du Chapitre V. On a d'ailleurs, dans le triangle de position,

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\beta \sin S = \sin\varepsilon\cos\alpha,\\ &\cos\beta\cos S = \cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha;\end{aligned}\right.$$

donc finalement

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' - \alpha = (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \operatorname{tg}\delta\sin\alpha)\,P - \operatorname{tg}\delta\cos\alpha\,.\,Q,\\ &\delta' - \delta = \sin\varepsilon\cos\alpha\,.\,P + \sin\alpha\,.\,Q.\end{aligned}\right.$$

Si $\cos\delta$ était voisin de zéro, on appliquerait la méthode de Fabritius.

On a d'habitude à résoudre le problème suivant : connaissant les coordonnées moyennes α, δ d'un point de la sphère céleste, rapportées au commencement d'une certaine année tropique, pris comme origine du temps, calculer les coordonnées vraies α', δ' de ce point, rapportées à l'équinoxe vrai de l'époque t

appartenant à cette même année; de sorte que si l'on prend l'année comme unité de temps, t sera une fraction positive inférieure à l'unité

Continuons à désigner par m et n les valeurs, pour la nouvelle origine du temps, des fonctions ainsi nommées précédemment, réduites à l'année comme unité ; soit, en d'autres termes, les précessions (générales) annuelles en ascension droite et en déclinaison, au commencement de l'année considérée ; on a, à cause de la petitesse de t,

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha' - \alpha = (m + n \operatorname{tg}\delta \sin\alpha)\, t + (\cos\varepsilon + \sin\varepsilon \operatorname{tg}\delta \sin\alpha) P - \operatorname{tg}\delta \cos\alpha . Q, \\ \delta' - \delta = n \cos\alpha . t + \sin\varepsilon \cos\alpha . P + \sin\alpha . Q.\end{array}\right.$$

Voici comment on dirige le calcul de façon à obtenir la correction $\alpha' - \alpha$ en secondes de temps, et la correction $\delta' - \delta$ en secondes d'arc.

Supposons m, n, P, Q exprimés en secondes d'arc, et faisons $m^s = \frac{m}{15}$, $n^s = \frac{n}{15}$, de sorte que m^s, n^s sont les expressions de m et n en secondes de temps. On pose

$$\begin{array}{ll} A = t + \frac{P}{n} \sin\varepsilon, & a = m^s + n^s \operatorname{tg}\delta \sin\alpha, \\ B = -Q, & a' = n \cos\alpha, \\ E = P\left(\cos\varepsilon - \frac{m}{n}\sin\varepsilon\right), & b = \frac{1}{15} \operatorname{tg}\delta \cos\alpha, \\ & b' = -\sin\alpha ; \end{array}$$

dans ces conditions, on a

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha' - \alpha = Aa + Bb + \frac{1}{15} E, \\ \delta' - \delta = Aa' + Bb'.\end{array}\right.$$

Les coefficients A, B, E dépendent uniquement de l'époque t; a, a', b, b', au contraire, ne dépendent que de α, δ, et de l'année tropique envisagée.

Il est facile de voir que, d'après la théorie, le coefficient de P dans E est très petit, de sorte que E reste très petit.

On pose encore

$$\left\{\begin{array}{ll} g \sin G = B, & f = mA + E, \\ g \cos G = nA, & \end{array}\right.$$

et alors,

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{f}{15} + \frac{g}{15} \operatorname{tg} \delta \sin (G + \alpha), \\ \delta' - \delta = g \cos (G + \alpha). \end{cases}$$

D'après les décisions des Conférences de Paris (1896 et 1911), on partage A et B en deux parties; les premières parties, auxquelles on conserve les désignations A et B, comprennent les termes les plus importants de la nutation, ceux dont la période est au moins de quatre mois, et en outre le terme t de A; les secondes parties, A′ et B′, renferment les termes à courte période de la nutation, qui restent toujours très petits, mais varient rapidement.

Il faut donc en réalité remplacer dans les formules ci-dessus A par A + A′, B par B + B′. De la même façon, en gardant la définition de g, G, f à l'aide des nouvelles valeurs de A et B, on doit poser eu outre

$$\begin{cases} g' \sin G' = B', \qquad f' = mA', \\ g' \cos G' = nA', \end{cases}$$

et l'on a les nouvelles formules

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{f}{15} + \frac{g}{15} \operatorname{tg} \delta \sin (G + \alpha) + \frac{f'}{15} + \frac{g'}{15} \operatorname{tg} \delta \sin (G' + \alpha), \\ \delta' - \delta = g \cos (G + \alpha) + g' \cos (G' + \alpha). \end{cases}$$

Ceci posé, on est convenu de négliger A′ et B′, et par suite f' et g', dans le calcul des éphérémides de tous les astres, sauf les étoiles circumpolaires.

On trouve dans la Connaissance des Temps les valeurs des constantes A, B, A′, B′, f, g, G, f', g', G′ pour tous les jours de l'année, ainsi que celles des constantes C, D, h, H, i définies au sujet de l'aberration.

Les corrections dues à A′, B′ peuvent encore se calculer sous la forme

$$d\alpha = J dP + K dQ, \qquad d\delta = J' dP + K' dQ,$$

où dP et dQ désignent l'ensemble des termes d'abord négligés

dans les nutations P et Q, et où l'on fait, d'après les premières formules qui définissent $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$,

$$J = \frac{1}{15}(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \delta \sin \alpha), \quad K = -\frac{1}{15} \operatorname{tg} \delta \cos \alpha,$$
$$J' = \sin \varepsilon \cos \alpha, \quad K' = \sin \alpha.$$

Les valeurs de dP et dQ se trouvent dans la Connaissance des Temps avec l'éphéméride du Soleil ; les valeurs des coefficients J, K, J', K' y sont indiquées aussi, pour chacune des étoiles dont l'éphéméride est publiée.

CHAPITRE XII

—

POSITIONS APPARENTES DES ASTRES

Coordonnées apparentes. — On appelle coordonnées *apparentes* d'un astre quelconque à l'instant t, et en un lieu donné, ses coordonnées (écliptiques ou équatoriales) rapportées à l'équinoxe vrai du même instant, telles qu'on les observe, après cependant les corrections préalables de réfraction et d'aberration diurne que l'on applique toujours immédiatement.

Le présent Chapitre a pour but d'expliquer comment on peut déterminer les coordonnées apparentes d'un astre quelconque, à un instant quelconque, et en un lieu quelconque.

Il faut distinguer deux cas, essentiellement différents, suivant qu'il s'agit d'un astre du système solaire, ou bien d'une étoile.

Cas des astres du système solaire. — Occupons-nous d'abord du premier cas, et soit S un astre du système solaire; nous pouvons supposer que le lieu d'observation est le centre T de la Terre, car la théorie de la parallaxe donnera le moyen de passer facilement ensuite de ce point à un point quelconque de la surface de la Terre.

La théorie du mouvement de l'astre S, supposée connue d'après la Mécanique céleste et les observations, permet de calculer les coordonnées géocentriques de S pour une époque quelconque t, rapportées à l'équinoxe moyen d'une autre époque t_0; on passera alors, en appliquant la précession, aux coordonnées de même nom rapportées à l'équinoxe moyen du

commencement de l'année tropique à laquelle appartient l'époque donnée ; puis par application simultanée de la précession et de la nutation, on obtiendra, comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre précédent, les coordonnées vraies de la direction TS à l'époque t. Les dernières corrections, soit

$$\begin{cases} \alpha' - \alpha = \frac{1}{15}\big(f + g \operatorname{tg} \delta \sin(G + \alpha)\big), \\ \delta' - \delta = g \cos(G + \alpha), \end{cases}$$

que l'on est ainsi amené à appliquer, constituent la *réduction au lieu vrai,* ou *réduction au jour*, pour les planètes ou comètes.

Il faut maintenant, pour obtenir les coordonnées apparentes de S à l'époque t, tenir compte de l'aberration ; soit à cet effet, θ le *temps d'aberration* pour S, c'est-à-dire qu'en désignant par S_1 la position de S à l'époque $t - \theta$, le chemin TS_1 est parcouru par la lumière précisément pendant le temps θ : d'après le théorème de l'aberration planétaire, la position apparente cherchée n'est autre chose que la position vraie de S à l'époque $t - \theta$, et il reste à déterminer celle-ci.

Le temps θ est égal au quotient de la distance TS_1 par la vitesse V de la lumière ; et par suite on ne pourrait l'évaluer exactement que si l'on connaissait le mouvement absolu de S, ce qui exigerait la connaissance du mouvement de translation du système solaire ; mais on peut confondre ici sans inconvénients TS_1 avec TS, θ étant court.

Appelons donc α, δ les coordonnées géocentriques vraies de S à l'époque t, et Δ la distance TS ; soient de plus $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\delta}{dt}$ les dérivées de α, δ par rappart au temps ; on peut prendre $\theta = \frac{\Delta}{V}$, et l'on aura avec une exactitude suffisante, pour les coordonnées vraies de S à l'époque $t - \theta$, c'est-à-dire les coordonnées apparentes à l'époque t, les valeurs

$$\alpha - \frac{\Delta}{V}\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \delta - \frac{\Delta}{V}\frac{d\delta}{dt}.$$

EXEMPLE. — Le 23 Août 1923, à midi moyen, la longitude véritable du Soleil, rapportée à l'équinoxe moyen de 1923,0 est 149°19′14″,37, tandis que la latitude est nulle ; l'obliquité

moyenne pour 1923,0 est d'ailleurs 23°26'57",49 ; de plus, en prenant la minute pour unité de temps, la dérivée de la longitude est égale à 2",409 ; enfin on a log $\Delta = 0{,}00480$.

On en déduit d'abord pour les coordonnées équatoriales correspondantes

$$\alpha = 10^h 5^m 46^s{,}024, \quad \delta = 11°42'53''{,}40,$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = 0^s{,}1537, \quad \frac{d\delta}{dt} = -0''{,}8420.$$

Pour appliquer la réduction au jour, on a, d'après la *Connaissance des Temps*, pour la date indiquée,

$$\frac{f}{15} = 1^s{,}697, \quad \log g = 1{,}1460, \quad G = 37°42';$$

les corrections correspondantes sont donc $+1^s{,}666$, $-13''{,}82$; et les coordonnées vraies du Soleil à la date indiquée deviennent

$$10^h 5^m 47^s{,}69, \quad 11°42'39''{,}58.$$

L'équation de la lumière étant $498^s{,}38$, le temps d'aberration θ ou $\frac{\Delta}{V}$ est ici $8^m{,}3986$; et pour passer aux coordonnées apparentes à la même date, il faut appliquer encore aux nombres précédents les corrections $-1^s{,}29$, $+7''{,}07$. Finalement, l'ascension droite et la déclinaison apparentes du Soleil à la date 1923 Août 23,0 sont

$$10^h 5^m 46^s{,}40, \quad 11°42'46''{,}65.$$

Positions moyennes des étoiles. — Passons maintenant au cas des étoiles. Supposons que l'on corrige la position apparente P d'une étoile de la parallaxe annuelle et de l'aberration annuelle complète, puis de la nutation ; on obtiendra ainsi une position P', qui sera d'une façon exacte, d'après ce qui a été dit au sujet de l'aberration, la direction rapportée au système de coordonnées moyennes employées pour l'instant t, de la droite qui joint les positions véritables du Soleil et de l'étoile au temps t_0, en désignant par t_0 l'époque de départ du rayon lumineux qui arrive de l'étoile à la Terre à l'époque t.

En fait, on convient, comme nous l'avons déjà indiqué, de

négliger dans le calcul de l'aberration annuelle les termes très petits qui contiennent en facteur l'excentricité de l'orbite du Soleil : ces termes restent d'ailleurs, pour une étoile déterminée, sensiblement constants pendant une longue période de temps, car ils ne dépendent que des coordonnées de l'étoile et des éléments de l'orbite solaire. Il en résulte que, après les corrections déjà citées, mais l'aberration étant réduite à ses termes principaux, la position apparente P fournit une position P″ qui diffère légèrement, mais d'une façon constante, de la position P′. C'est cette position P″ que l'on appelle *position moyenne* de l'étoile à l'époque t.

En lui appliquant inversement la nutation, l'aberration réduite à ses termes principaux, et la parallaxe, on retombe sur la position apparente P : et c'est là tout ce qui nous importe, car comme nous ne connaissons pas suffisamment la distance des étoiles à la Terre, nous ne pouvons pas obtenir les coordonnées proprement dites d'une étoile par rapport à la Terre ou au Soleil à une époque déterminée, comme quand il s'agit des astres du système solaire.

Mouvement propre. — La position moyenne d'une étoile est fonction du temps t, d'abord parce qu'elle est rapportée au système de coordonnées moyennes employées pour l'époque t. Pour faire disparaître cette cause de variabilité, on peut rapporter la position moyenne de l'époque variable t, par application de la précession, à une époque fixe t_0 : on obtient ainsi les coordonnées, par rapport à l'écliptique ou l'équateur et l'équinoxe moyens de l'époque t_0, de la position moyenne à l'époque t. Ces coordonnées sont encore des fonctions du temps t, mais des fonctions qui varient avec une extrême lenteur, en vertu du *mouvement propre* de l'étoile, mouvement que nous devons maintenant étudier.

On peut considérer chaque étoile, ou plus exactement le centre de gravité de chaque système stellaire, comme soustrait à toute action extérieure, à cause de la grandeur des distances des étoiles entre elles : par suite, chaque étoile se déplace uniformément suivant une ligne droite, tout comme le centre de gravité du système solaire : et si ce fait n'est pas rigoureux,

on peut le regarder comme exact au moins pendant une très longue période de temps.

Le *mouvement propre* d'une étoile S par rapport au Soleil O est donc uniforme. Soit SS′ la trajectoire (*fig.* 57) et définissons la position du point S par ses coordonnées polaires OS ou r, xOs ou θ, l'axe polaire Ox étant dans le plan OSS′; soit de plus v la vitesse constante de S.

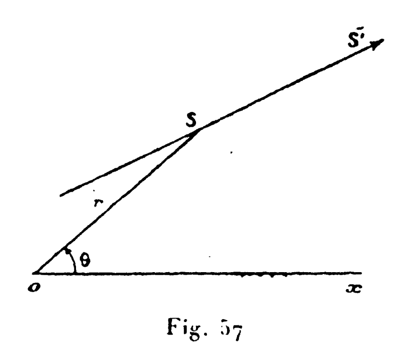


Fig. 57

Le mouvement se fait évidemment suivant la loi des aires, de sorte qu'on a la relation

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

ou bien, en appelant ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, et v_r la vitesse radiale $\frac{dr}{dt}$,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\omega v_r}{r};$$

ou encore, en introduisant la parallaxe ϖ de l'étoile et appelant toujours b la distance moyenne de la Terre au Soleil,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\omega\varpi v_r}{b}.$$

La vitesse radiale v_r peut être déterminée à l'aide d'observations spectroscopiques, et par application du principe de Doppler-Fizeau : il est exceptionnel qu'elle atteigne ou dépasse 100 kilomètres par seconde. La parallaxe ϖ est toujours inférieure à $1''$, et la vitesse ω à $10''$ par an ; la valeur absolue de $\frac{d\omega}{dt}$ est donc inférieure (en prenant l'année pour unité de temps) à

$$\frac{2 \times 10'' \times \sin 1'' \times 100 \times 86400 \times 365{,}256 \times \sin 8'',80}{6378},$$

c'est-à-dire à $0'',002$. C'est là d'ailleurs une limite beaucoup trop élevée, eu égard à la réalité, et par suite, dans l'état actuel de l'Astronomie, nous devons considérer la vitesse angulaire ω comme constante, et conclure par conséquent que la

position moyenne d'une étoile décrit, avec une vitesse angulaire constante, un grand cercle sur la sphère céleste qui a pour centre le Soleil.

Pour définir le mouvement propre à l'époque t, les axes étant quelconques, par exemple ceux des coordonnées équatoriales moyennes à l'époque t_0, il faut se donner, outre la vitesse angulaire constante ω, l'angle de position P du grand cercle trajectoire de l'étoile; cet angle est compté suivant notre convention générale, dans le sens rétrograde depuis Sz jusqu'à la direction positive du mouvement, z étant le pôle du système (*fig.* 58).

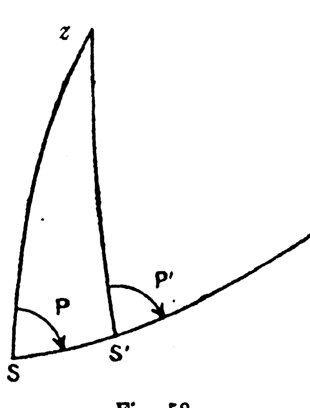


Fig. 58

Soit alors S' la position de l'étoile S à l'époque t', l'intervalle de temps $t' - t$ étant infiniment petit; et appelons α', δ' ses coordonnées (les axes restant fixes). L'arc SS' est égal à $\omega(t' - t)$, et d'après les formules (32) du Chapitre III, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \omega \sin P \text{ séc } \delta (t' - t), \\ \delta' - \delta &= \omega \cos P (t' - t); \end{aligned} \right.$$

les quantités

$$\mu = \omega \sin P \text{ séc } \delta, \qquad \nu = \omega \cos P,$$

sont donc appelées à juste titre les *composantes du mouvement propre* en ascension droite et en déclinaison (pour l'époque t et les axes fixes choisis) : ce sont ces quantités que l'on se donne d'habitude, au lieu de ω et P, pour définir le mouvement propre d'une étoile.

Si l'on considère les coordonnées de l'étoile, α, δ, comme des fonctions du temps t, les composantes μ, ν du mouvement propre sont précisément les dérivées de ces fonctions. Si donc on veut avoir les coordonnées de l'étoile à une autre époque quelconque t', il suffira d'écrire les développements

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \mu (t' - t) + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dt} (t' - t)^2 + \ldots\ldots, \\ \delta' &= \delta + \nu (t' - t) + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dt} (t' - t)^2 + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Pour former les coefficients de ces développements, on voit qu'il suffit de connaître la dérivée $\frac{dP}{dt}$ de l'angle de position P. Or si nous reprenons l'hypothèse de $t' - t$ infiniment petit, et si nous appelons P' ce que devient alors P, la dernière des formules (32) du Chapitre III nous donne encore

$$P' - P = \omega \sin P \operatorname{tg} \delta (t' - t);$$

par suite

$$\frac{dP}{dt} = \omega \sin P \operatorname{tg} \delta = \mu \sin \delta.$$

En différentiant les expressions de μ et ν, on trouve alors sans peine

$$\frac{d\mu}{dt} = 2\mu\nu \operatorname{tg} \delta, \qquad \frac{d\nu}{dt} = -\mu^2 \sin \delta \cos \delta, \ldots\ldots$$

Les dérivées $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\delta'}{dt}$, sont les nouvelles composantes du mouvement propre, pour l'époque t', rapportées toujours aux mêmes axes, soit

$$\left\{\begin{aligned} \mu' &= \mu + \frac{d\mu}{dt}(t' - t) + \ldots\ldots, \\ \nu' &= \nu + \frac{d\nu}{dt}(t' - t) + \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les termes que nous avons écrits explicitement dans les valeurs de α', δ', μ', ν' sont généralement plus que suffisants pour assurer toute l'exactitude désirable, et bien souvent ceux du second ordre sont entièrement négligeables. En se bornant effectivement à ces termes, on pourra prendre encore

$$\alpha' = \alpha + \frac{\mu + \mu'}{2}(t' - t), \qquad \delta' = \delta + \frac{\nu + \nu'}{2}(t' - t).$$

Quand il s'agit d'une étoile extrêmement voisine de l'un des pôles, les formules peuvent devenir exceptionnellement inapplicables; on substituera alors à l'emploi des coordonnées polaires α, δ celui des coordonnées rectangulaires correspondantes, comme dans tous les cas analogues, sans qu'il soit nécessaire d'insister ici sur ce point; ou bien on fera usage de formules rigoureuses.

Envisageons maintenant un autre problème : connaissant

les éléments α, δ, μ, ν pour une époque quelconque fixe t_0, rapportés aux axes équatoriaux moyens de l'époque t, calculer les éléments correspondants α', δ', μ', ν', rapportés aux axes équatoriaux moyens d'une autre époque t'.

Relativement à α', δ', le problème est résolu par les formules générales de la précession ; il nous suffit donc de chercher les nouvelles valeurs μ', ν'. Soit P' l'angle de position du mouvement propre pour les axes de l'époque t' ; ces nouveaux axes sont définis par rapport aux anciens par les éléments i_1, σ_1, σ_1', déterminés au Chapitre précédent, et si S est l'angle à l'astre dans le triangle de position relatif à ce changement de coordonnées, on a évidemment

$$P' = P + S;$$

par suite

$$\left\{\begin{aligned} \mu' \cos\delta' &= \mu \cos\delta \cos S + \nu \sin S, \\ \nu' &= -\mu \cos\delta \sin S + \nu \cos S; \end{aligned}\right.$$

d'ailleurs, d'après les équations (22) du Chapitre III,

$$\left\{\begin{aligned} \cos\delta' \sin S &= \sin i_1 \cos(\alpha - \sigma_1), \\ \cos\delta' \cos S &= \cos i_1 \cos\delta + \sin i_1 \sin\delta \sin(a - \sigma_1). \end{aligned}\right.$$

Supposons $t' - t$ infiniment petit ; on a, en conservant toujours les notations du Chapitre précédent,

$$i_1 = n(t' - t), \qquad \sigma_1 = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$S = n \operatorname{séc}\delta \sin\alpha . (t' - t);$$

de plus, on sait que

$$\delta' - \delta = n \cos\alpha . (t' - t).$$

Il en résulte immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} (\mu' - \mu) \cos\delta &= n(\mu \sin\delta \cos\alpha + \nu \operatorname{séc}\delta \sin\alpha)(t' - t), \\ \nu' - \nu &= -n\mu \sin\alpha . (t' - t). \end{aligned}\right.$$

Si donc on considère μ et ν comme des fonctions du temps t, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= n(\mu \operatorname{tg}\delta \cos\alpha + \nu \operatorname{séc}^2\delta \sin\alpha), \\ \frac{d\nu}{dt} &= -n\mu \sin\alpha; \end{aligned}\right.$$

et si l'on voulait calculer les dérivées d'ordre supérieur, il suffirait de se souvenir que l'on a, dans les mêmes conditions,

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha, \qquad \frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha\,;$$

on obtiendrait ainsi μ' et ν' sous forme de séries ordonnées suivant les puissances de $(t' - t)$.

Catalogues d'étoiles et problèmes correspondants. — Un *catalogue* d'étoiles fournit les positions moyennes équatoriales d'un certain nombre d'étoiles, et leurs mouvements propres, pour une date déterminée t, en général le commencement d'une année tropique. Il est alors facile, en appliquant les formules relatives à la précession données au Chapitre précédent et tenant compte, comme nous venons de le dire, du mouvement propre, de trouver la position moyenne d'une étoile du catalogue pour une autre date t', ainsi que son mouvement propre; cette date est en général aussi le commencement d'une année tropique, et la nouvelle position doit être rapportée aux coordonnées équatoriales moyennes correspondantes.

Précisons la marche à suivre pour résoudre ce problème général. Soient α, δ, μ, ν, les données du catalogue, ces notations n'ayant pas besoin d'être expliquées davantage; et soient α', δ', μ', ν', les éléments correspondants cherchés. En tenant compte du mouvement propre, on a d'abord facilement les quantités intermédiaires α_1, δ_1, μ_1, ν_1, relatives à la position moyenne de l'époque t', mais rapportées aux axes primitifs; les formules sont

$$\left\{\begin{aligned} \mu_1 &= \mu + 2\mu\nu \operatorname{tg} \delta\,(t' - t), & \nu_1 &= \nu - \mu^2 \sin \delta \cos \delta\,(t' - t), \\ \alpha_1 &= \alpha + \frac{\mu + \mu_1}{2}(t' - t), & \delta_1 &= \delta + \frac{\nu + \nu_1}{2}(t' - t). \end{aligned}\right.$$

Appliquant maintenant à α_1, δ_1, μ_1, ν_1, la précession entre les époques t et t', on aura finalement les quantités cherchées.

On peut suivre une autre voie équivalente. On applique d'abord la précession entre les époques t et t' aux données elles-mêmes α, δ, μ, ν, et l'on trouve ainsi d'autres éléments intermédiaires α_2, δ_2, μ_2, ν_2, relatifs à la position primitive, mais

rapportés aux nouveaux axes; puis on applique à ces résultats le mouvement propre μ_2, ν_2 entre t et t' : on retrouve α', δ', μ', ν'.

Dans le cas où les développements en série sont suffisants, on peut les obtenir de la façon suivante. Envisageons d'une façon plus générale les éléments α, δ, μ, ν, qui fixent la position d'une étoile à une époque quelconque t_1, les axes de coordonnées étant les axes équatoriaux moyens à une autre époque quelconque t : les quantités α, δ, μ, ν sont ainsi fonctions des deux variables indépendantes t et t_1 ; et si l'on appelle α', δ', μ', ν' leurs valeurs quand on remplace t par t', t_1 par t_1', on a des développements en série tel que

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t'-t) + \frac{\partial\alpha}{\partial t_1}(t_1'-t_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(t'-t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial t_1}(t'-t)(t_1'-t_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t_1^2}(t_1'-t_1)^2 + \ldots\ldots, \\ \delta' &= \delta + \frac{\partial\delta}{\partial t}(t'-t) + \frac{\partial\delta}{\partial t_1}(t_1'-t_1) + \ldots\ldots, \\ \mu' &= \mu + \frac{\partial\mu}{\partial t}(t'-t) + \frac{\partial\mu}{\partial t_1}(t_1'-t_1) + \ldots\ldots, \\ \nu' &= \nu + \frac{\partial\nu}{\partial t}(t'-t) + \frac{\partial\nu}{\partial t_1}(t_1'-t_1) + \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

de sorte que tout est ramené à la détermination des coefficients de ces séries.

Si l'on fait varier uniquement t, les axes seuls changent, et la précession seule intervient : donc, en désignant toujours par m et n les mêmes quantités, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \alpha_1 = m + n \operatorname{tg}\delta \sin\alpha, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial t} = \delta_1 = n\cos\alpha;$$

si, en second lieu, on fait varier uniquement t_1, les axes restent fixes, et le mouvement propre seul intervient; par suite, d'après les résultats du paragraphe précédent,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial t_1} &= \mu, & \frac{\partial^2\alpha}{\partial t_1^2} &= \frac{\partial\mu}{\partial t_1} = 2\mu\nu \operatorname{tg}\delta, \\ \frac{\partial\delta}{\partial t_1} &= \nu, & \frac{\partial^2\delta}{\partial t_1^2} &= \frac{\partial\nu}{\partial t_1} = -\mu^2\sin\delta\cos\delta. \end{aligned}\right.$$

Ces six équations suffisent pour déterminer, par différen-

tiations successives, les dérivées d'ordre supérieur de α et δ.

On a d'abord

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \alpha_2, \qquad \frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = \delta_2,$$

en reprenant les notations introduites au Chapitre précédent (à propos des variations séculaires); puis

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\alpha}{\partial t \partial t_1} &= \frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial t_1} = n(\mu \operatorname{tg}\delta \cos\alpha + \nu \operatorname{séc}^2\delta \sin\alpha), \\ \frac{\partial^2\delta}{\partial t \partial t_1} &= \frac{\partial\nu}{\partial t} = \frac{\partial\nu_1}{\partial t_1} = -n\mu \sin\alpha, \end{aligned}\right.$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus à la fin du paragraphe précédent d'une façon toute différente; et ainsi de suite.

Remarquons encore que

$$\mu' = \frac{\partial\alpha'}{\partial t_1{}'}, \qquad \nu' = \frac{\partial\delta'}{\partial t_1{}'}.$$

Si l'on fait maintenant $t_1 = t$, $t_1{}' = t'$, on aura la solution du problème proposé primitivement : α, δ, μ, ν étant des fonctions de t, leurs dérivées seront

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 + \mu, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \delta_1 + \nu,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 2\mu\nu \operatorname{tg}\delta + n\mu \operatorname{tg}\delta\cos\alpha + n\nu \operatorname{séc}^2\delta \sin\alpha,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\mu^2 \sin\delta\cos\delta - n\mu\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha_2 + 2\mu\nu \operatorname{tg}\delta + 2n\mu \operatorname{tg}\delta\cos\alpha + 2n\nu \operatorname{séc}^2\delta\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \delta_2 - \mu^2\sin\delta\cos\delta - 2n\mu\sin\alpha;$$

et ainsi de suite.

Les développements de α', δ', μ', ν' en séries ordonnées suivant les puissances de $t' - t$ résultent immédiatement de ces formules. Les calculs nécessités par leur mise en nombres sont facilités par des tables, et par les catalogues eux-mêmes, qui donnent généralement, en même temps que les positions moyennes des étoiles, leurs *variations annuelles*, c'est-à-dire les

coefficients $\alpha_1 + \mu$, $\delta_1 + \nu$, et aussi les variations séculaires correspondantes.

Si l'on recherche une extrême précision, il faudra tenir compte des termes du troisième ordre par rapport au temps, ou recourir aux méthodes rigoureuses.

Exemple. — Pour l'étoile 1830 Groombridge, et pour l'époque 1875,0, on a, en prenant l'année pour unité de temps,

$$\alpha = 11^h45^m46^s,120, \qquad \delta = 38°36'55'',55,$$
$$\mu = 0^s,34198, \qquad \nu = -5'',7797;$$

calculer α', δ', μ', ν' pour l'époque 1910,0.

Remarquons que nous avons ici un des plus grands mouvements propres observés. Employant la première méthode indiquée, on a d'abord

$$\mu_1 = 0^s,34144, \qquad \nu_1 = -5'',7819,$$
$$\alpha_1 = 11^h45^m58^s,080, \qquad \delta_1 = 38°33'33'',22.$$

On est alors ramené à un exercice résolu plus haut, et l'on a

$$\alpha' = 11^h47^m47^s,733, \qquad \delta' = 38°21'52'',71;$$

pour calculer ensuite μ' et ν', on détermine l'angle S, que l'on trouve égal à 51'',25, et il en résulte

$$\mu' = 0^s,34040, \qquad \nu' = -5'',7829.$$

On trouvera les mêmes résultats par les autres méthodes, à des différences insignifiantes près.

Réduction au jour. — Une fois obtenue la position moyenne d'une étoile pour le commencement d'une année tropique, on aura sans peine ses coordonnées apparentes pour une époque quelconque t comptée à partir du début de cette année et rapportée à l'année comme unité de temps; en laissant de côté la parallaxe, dont on tiendra compte ultérieurement s'il y a lieu, il suffira d'appliquer les corrections d'aberration, de précession, de nutation et de mouvement propre, ce qui fournira la *réduction au lieu apparent* ou *réduction au jour*. Les formules développées aux Chapitres IX et XI résolvent le problème. Désignant par α', δ' les coordonnées apparentes cherchées, par α et δ les coordonnées moyennes au commencement de l'année,

par μ et ν les composantes du mouvement propre annuel correspondant à α et δ, exprimées la première en secondes de temps, la deuxième en secondes d'arc, on aura, les corrections d'ascension droite et de déclinaison étant exprimées de même en secondes de temps et en secondes d'arc,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + \frac{1}{15}E + t\mu \\ &= \frac{1}{15}\left[f + g\sin(G+\alpha)\operatorname{tg}\delta + h\sin(H+\alpha)\operatorname{s\acute{e}c}\delta\right] + t\mu, \\ \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + t\nu \\ &= g\cos(G+\alpha) + h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta + t\nu. \end{aligned}\right.$$

Pour tenir compte des termes négligés de la nutation, ce qui ne se fait que dans les éphémérides des étoiles circumpolaires, on ajoutera à $\alpha' - \alpha$ la correction

$$A'a + B'b, \quad \text{ou} \quad \frac{f'}{15} + \frac{g'}{15}\sin(G'+\alpha)\operatorname{tg}\delta, \quad \text{ou} \quad J\,dP + K\,dQ,$$

et à $\delta' - \delta$ la correction

$$A'a' + B'b', \quad \text{ou} \quad g'\cos(G'+\alpha), \quad \text{ou} \quad J'dP + K'dQ.$$

Enfin, pour les étoiles très voisines de l'un des pôles, on améliorera les résultats précédents en employant la méthode de Fabritius, d'après les formules (28) du Chapitre III. Si $d\alpha$ et $d\delta$ désignent les expressions que nous venons d'obtenir pour $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$, on aura plus exactement

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{d\alpha}{1 - d\delta\operatorname{tg}\delta}, \qquad \delta' - \delta = d\delta - d\alpha\sin\delta\cos\delta\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha),$$

en ayant soin d'exprimer $d\alpha$ et $d\delta$ avec les unités convenables, suivant les cas. Pour se convaincre de la légitimité de cette méthode, il suffit d'observer que, si l'on employait les coordonnées écliptiques, aucune difficulté ne se présenterait : or, $d\alpha$ et $d\delta$ sont précisément les corrections que fournit d'une façon générale la transformation des coordonnées écliptiques en coordonnées équatoriales ; donc on pourra encore se servir de ces valeurs pour trouver $\alpha' - \alpha$ et $\delta' - \delta$ exactement, comme nous l'avons dit bien souvent.

Si l'on voulait une exactitude absolue dans ce calcul, il fau-

drait procéder de la façon suivante : à la position moyenne α, δ du commencement de l'année, on appliquerait d'abord uniquement la précession et le mouvement propre jusqu'à l'époque t ; à la position α_1, δ_1, moyenne à l'époque t, ainsi obtenue, on appliquerait rigoureusement, ou bien à l'aide des formules de Fabritius, la nutation ; enfin, à la position vraie, α_2, δ_2, ainsi déterminée, on appliquerait de même l'aberration, et l'on aurait finalement la position apparente α', δ' : on peut d'ailleurs renverser l'ordre des deux dernières opérations. Mais en général, on peut se borner à la méthode habituelle, qui confond α_1, δ_1 et α_2, δ_2 avec α, δ pour le calcul des corrections.

Les éphémérides fournissent toutes les données nécessaires à l'exécution des calculs précédents, pour chaque jour de l'année.

Exemples. — 1° Pour l'étoile α Baleine et l'époque 1923,0, on a

$$\alpha = 2^h 58^m 15^s,125, \qquad \delta = 3°47'18'',58.$$

Quelles seront les coordonnées apparentes le 5 novembre 1923, à 12 heures (temps moyen de Greenwich) ? le mouvement propre annuel a d'ailleurs pour composantes

$$\mu = -0^s,0009, \qquad \nu = -0'',078.$$

La *Connaissance des Temps* donne, pour la date indiquée,

$$t = 0,845, \quad \frac{f}{15} = 2^s,106, \quad \log \frac{g}{15} = 0,0334, \quad \log \frac{h}{15} = 0,1155,$$
$$\log g = 1,2095, \quad \log h = 1,2916, \quad \log i = 0,7782,$$
$$G = 2^h 7^m,7, \quad H = 2^h 59^m,9.$$

On trouve alors

$$\alpha' - \alpha = 3^s,482, \qquad \delta' - \delta = 9'',71,$$

c'est-à-dire

$$\alpha' = 2^h 58^m 18^s,607, \qquad \delta' = 3°47'28'',29.$$

2° Pour l'étoile B Octant et l'époque 1923,0, on a

$$\alpha = 22^h 0^m 23^s,642, \qquad \delta = -89°12'35'',59,$$

avec

$$\mu = +0^s,0152, \qquad \nu = -0'',029 ;$$

quelles sont les coordonnées apparentes le 22 août 1923, à 12 heures?

Pour l'époque indiquée, on a

$$t = 0,64, \quad \frac{f}{15} = 1^s,694, \quad \frac{f'}{15} = 0^s,009,$$

$$\log \frac{g}{15} = \bar{1},9696, \quad \log \frac{g'}{15} = \bar{3},761, \quad \log \frac{h}{15} = 0,1083,$$

$$\log g = 1,1457, \ \log g' = \bar{2},937, \ \log h = 1,2844, \ \log i = 0,8433.$$
$$G = 2^h31^m,1, \quad G' = 3^h,2, \quad H = 8^h13^m,5.$$

En négligeant d'abord les termes à courte période de la nutation, on a

$$d\alpha = 85^s,34, \quad d\delta = 15'',10,$$

et ces nombres deviennent, en faisant la correction de Fabritius,

$$d\alpha = 84^s,89, \quad d\delta = 15'',15.$$

Quant aux termes à courte période, ils fournissent les nouveaux accroissements

$$d'\alpha = -0^s,13, \quad d'\delta = 0'',08\,;$$

finalement donc

$$\alpha' = 22^h1^m48^s,40, \quad \delta' = -89^\circ12'20'',36.$$

La précision ainsi obtenue en ascension droite est d'ailleurs un peu illusoire, car les observations d'une étoile aussi voisine du pôle sont loin de correspondre à une telle exactitude.

Formules différentielles. — Considérons deux étoiles voisines S et S_1, et définissons la position de S_1 par rapport à S par les différences d'ascension droite et de déclinaison $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, ou bien par la distance s et l'angle de position Q, qui, les coordonnées étant ici orientées dans le sens direct, sera compté dans le sens rétrograde depuis le cercle horaire de S dirigé vers le pôle jusqu'à l'arc SS_1.

Les quantités $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, s, Q se rapportant aux coordonnées moyennes au commencement de l'année, quels changements

subiront-elles quand on passera aux coordonnées apparentes? en d'autres termes, quelles sont les formules différentielles relatives à la réduction au jour? Pour le savoir, il suffit d'appliquer les formules générales que nous avons données à ce sujet au Chapitre III. En négligeant les mouvements propres, et laissant de côté le facteur 15, afin de rétablir l'homogénéité, on a ici

$$\begin{cases} d\alpha = f + g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{séc} \delta, \\ d\delta = g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta, \end{cases}$$

et les quantités f, g, G, h, H, i sont indépendantes de α et δ. Par suite :

$$\frac{\partial(d\alpha)}{\partial\alpha} = g \cos(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \cos(H + \alpha) \operatorname{séc} \delta,$$

$$\frac{\partial(d\alpha)}{\partial\delta} = g \sin(G + \alpha) \operatorname{séc}^2\delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{séc} \delta \operatorname{tg} \delta,$$

$$\frac{\partial(d\delta)}{\partial\alpha} = -g \sin(G + \alpha) - h \sin(H + \alpha) \sin \delta,$$

$$\frac{\partial(d\delta)}{\partial\delta} = h \cos(H + \alpha) \cos \delta - i \sin \delta.$$

Il vient alors en particulier :

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{s} = h \cos(H + \alpha) \cos \delta - i \sin \delta, \\ dQ = g \sin(G + \alpha) \operatorname{séc} \delta + h \sin(H + \alpha) \operatorname{tg} \delta. \end{cases}$$

On voit que ds ne dépend ni de la précession ni de la nutation : c'est évident, puisque ce sont les plans de coordonnées qui seuls sont affectés par ces causes. On voit de plus que les quantités ds et dQ sont indépendantes de l'angle de position Q : l'effet de l'aberration, en particulier, est donc le même dans toutes les directions autour du point S.

CHAPITRE XIII

MOUVEMENT DU SOLEIL. — TEMPS

Mouvement géocentrique du Soleil. — Au lieu d'envisager le mouvement de la Terre par rapport au Soleil, on considère d'habitude le mouvement du Soleil par rapport à la Terre, ce qui est équivalent.

D'après ce qui a été dit au Chapitre X, le Soleil décrit autour de la Terre une orbite elliptique à éléments variables avec le temps. Nous laisserons de côté dans tout ce qui suivra les perturbations périodiques et mixtes des éléments ou des coordonnées, et nous nous contenterons de représenter par le symbole général $\mathfrak{P}$ un groupe quelconque de termes périodiques ou mixtes.

Le demi-grand axe a de l'orbite solaire n'a pas d'inégalités séculaires ; sa valeur moyenne est très voisine de l'unité ; on a d'après S. Newcomb, que nous suivrons encore dans tout ce Chapitre, $\log_{10} a = 0{,}000\,000\,10$. A cette valeur de a, correspond un moyen mouvement n déterminé par la relation $n^2a^3 = f(m_0 + m)$, m_0 et m étant respectivement les masses du Soleil et du système Terre-Lune.

Prenons pour plan fixe l'écliptique E_0 à l'origine du temps, et comptons les longitudes à partir de l'équinoxe moyen correspondant.

La longitude moyenne de l'époque, l_0, a des inégalités séculaires et périodiques, et l'on peut écrire

$$l_0 = \lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \mathfrak{P},$$

λ_0, λ_1, λ_2 étant des constantes dont la dernière est très petite.

De même, on a pour la longitude du périgée et pour l'excentricité des expressions de la forme

$$\begin{cases} \varpi = \varpi_0 + \varpi_1 t + \varpi_2 t^2 + \mathfrak{P}, \\ e = e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Enfin, comme nous l'avons dit à propos de la précession, si φ est la longitude du nœud ascendant, et k l'inclinaison, on a

$$\begin{cases} \sin k \sin \varphi = p_1 t + p_2 t^2 + \mathfrak{P}, \\ \sin k \cos \varphi = q_1 t + q_2 t^2 + \mathfrak{P}; \end{cases}$$

nous conserverons d'ailleurs, d'une façon générale, dans ce qui suivra, toutes les notations du Chapitre XI.

Connaissant les valeurs numériques des coefficients que nous venons d'introduire (nous les donnerons plus loin), il sera facile de résoudre toutes les questions relatives au mouvement du Soleil, en négligeant l'influence très petite des perturbations périodiques.

Considérons d'abord la longitude moyenne l; comme dans le mouvement elliptique, elle est égale à $nt + l_0$, de sorte que

$$l = \lambda_0 + (n + \lambda_1) t + \lambda_2 t^2 + \mathfrak{P}.$$

Le plus souvent, quand on parle de la longitude moyenne du Soleil, on fait abstraction des termes périodiques $\mathfrak{P}$.

La *vitesse* de cette longitude moyenne à l'époque t, soit $n + \lambda_1 + 2\lambda_2 t$, est ce qu'on appelle à proprement parler le moyen mouvement *sidéral* du Soleil, au lieu de n : c'est en effet le moyen mouvement tel que le fournissent les observations ; il est dit sidéral, parce que l est comptée à partir d'un point fixe.

L'équation du centre C se calculera comme dans le mouvement elliptique, à l'aide des valeurs de e, l, ϖ.

Si donc λ est la longitude du Soleil dans son orbite, comptée à partir de l'équinoxe moyen de l'origine du temps, on a

$$\lambda = \lambda_0 + (n + \lambda_1) t + \lambda_2 t^2 + C + \mathfrak{P}.$$

Cherchons maintenant la longitude $\odot$ du Soleil, rapportée à l'écliptique de l'époque t et à l'équinoxe vrai correspondant, c'est-à-dire la longitude vraie au temps t; il faut évidemment

ajouter à λ la précession générale et la nutation en longitude, de sorte que

$$\odot = \lambda_0 + (n + \lambda_1 + h_1)t + (\lambda_2 + h_2)t^2 + C + P + \mathfrak{L},$$

en laissant de côté le terme en t^3.

La latitude du Soleil, rapportée au même plan, ne comprend que des termes périodiques très petits, de l'ordre des perturbations, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, à propos de la définition de l'écliptique.

Si enfin on veut le rayon vecteur R, on le calculera par les formules du mouvement elliptique.

Ajoutons encore que si, comme il est d'usage, on veut avoir la longitude apparente du Soleil à l'époque t, soit $\odot'$, il faut tenir compte de l'aberration, de sorte que

$$\odot' = \odot - k,$$

k étant la constante de l'aberration, en négligeant un petit terme périodique que l'on peut faire entrer dans $\mathfrak{P}$.

Ascension droite du Soleil. — Déterminons maintenant l'ascension droite *apparente* α du Soleil à l'époque t, rapportée à l'équateur et à l'équinoxe vrais. En négligeant la latitude du Soleil, qui ne donne que de petits termes périodiques, on a immédiatement

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \odot',$$

et par suite $\alpha = \odot' + \rho$, en désignant par ρ la *réduction à l'équateur*, égale comme on sait à

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2 \odot' + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4 \odot' - \ldots\ldots,$$

et composée par suite de termes périodiques. Donc, finalement

$$\alpha = \lambda_0 - k + (n + \lambda_1 + h_1)t + (\lambda_2 + h_2)t^2 + C + \rho + P + \mathfrak{L}.$$

Temps sidéral. — Pour pouvoir calculer l'angle horaire du Soleil en un lieu donné M, il est nécessaire de déterminer d'abord le temps sidéral local, θ.

Considérons à cet effet un système d'axes rectangulaires $O\xi\eta\zeta$ (*fig.* 59), fixes par rapport à la Terre, et ayant pour origine le centre de gravité de celle-ci. Si N est le nœud ascendant du plan $\xi\eta$ par rapport à l'équateur vrai A, la position du trièdre $O\xi\eta\zeta$ par rapport au trièdre $O\gamma YZ$ des axes équatoriaux vrais peut être définie par l'arc γN ou ψ, l'arc ξN ou χ, et l'inclinaison σ de $\xi\eta$ sur A. La rotation instantanée du trièdre $O\xi\eta\zeta$, c'est-à-dire de la Terre même, s'obtient en composant avec celle du trièdre $O\gamma YZ$ trois autres rotations, savoir : la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ autour de OZ, la rotation $\frac{d\sigma}{dt}$ autour de ON, la rotation $-\frac{d\chi}{dt}$ autour de $O\zeta$; par suite, si l'on appelle C la projection sur l'axe OZ de la rotation du trièdre $O\gamma YZ$, la projection de la rotation instantanée de la Terre sur le même axe sera

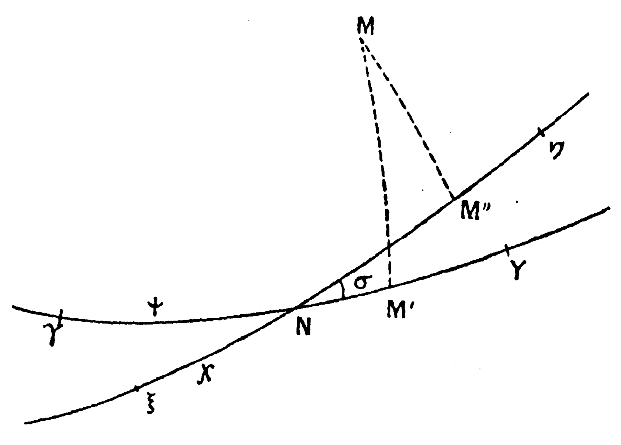


Fig. 59

$$\omega = C + \frac{d\psi}{dt} - \cos\sigma \frac{d\chi}{dt},$$

ou bien, d'après une remarque faite au Chapitre XI,

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} - \cos\sigma \frac{d\chi}{dt} - m - \frac{d}{dt}(P\cos\varepsilon) + nQ.$$

Mais, d'après la définition de l'équateur, OZ est précisément l'axe instantané de rotation de la Terre, et par suite, l'expression précédente représente la valeur de la rotation de la Terre sur elle-même, qui doit être regardée comme absolument constante, ainsi que nous l'avons déjà dit.

D'autre part, si M est un point fixe de la surface de la Terre, et que l'on mène les arcs de grand cercle MM′, MM″, perpendiculaires sur γY, $\xi\eta$, le premier de ces arcs est le méridien de M, et l'arc $\gamma M'$ représente le temps sidéral θ, en M, à l'époque t.

Enfin, si $O\zeta$ est l'axe principal d'inertie de la Terre, considérée comme un corps solide, qui correspond au plus grand des moments d'inertie principaux, la théorie et les observations nous apprennent que l'angle σ reste extrêmement petit, de sorte qu'on peut confondre $\cos\sigma$ avec l'unité, et l'arc NM″ avec l'arc NM′ (à moins que le point M ne soit très rapproché de l'un des pôles terrestres) ; en d'autres termes, le temps sidéral θ et l'arc $\psi - \chi$ ne diffèrent que par une constante, et l'on peut écrire

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} - m - \frac{d}{dt}(P\cos\varepsilon) + nQ.$$

Par suite, négligeant encore l'intégrale de la différentielle $nQdt$, qui est tout à fait insensible, on a finalement

$$\theta = \theta_0 + (\omega + m_1)t + \frac{m_2}{2}t^2 + P\cos\varepsilon,$$

θ_0 désignant une constante qui dépend de la position du point M.

Temps vrai. — L'angle horaire du Soleil dans le lieu considéré, ou temps vrai H, a pour valeur $\theta - \alpha$; donc

$$H = \theta_0 - \lambda_0 + k + (\omega - n - \lambda_1 + m_1 - h_1)t + \left(\frac{m_2}{2} - h_2 - \lambda_2\right)t^2 - C - \rho - P(1 - \cos\varepsilon) + \mathfrak{L},$$

et l'on voit bien que, de même que le temps sidéral, le temps vrai ne varie pas proportionnellement au temps absolu t.

Soleil moyen. Temps moyen. — Considérons un astre fictif, supposé dans l'équateur (à une distance infinie), et dont l'angle horaire apparent ait pour valeur à chaque instant

$$H_0 = \theta_0 - \lambda_0 + k + (\omega - n - \lambda_1 + m_1 - h_1)t,$$

c'est-à-dire la valeur de H limitée à son terme constant et à

son terme proportionnel au temps. Cet astre est le *Soleil moyen* ; H_0 est le *temps moyen*, qui varie d'une façon rigoureuse proportionnellement au temps absolu t.

L'ascension droite α_0 du Soleil moyen est $\theta - H_0$, de sorte que

$$\alpha_0 = \lambda_0 - k + (n + \lambda_1 + h_1)t + \frac{m_2}{2}t^2 + P \cos \varepsilon ;$$

elle ne varie pas proportionnellement à t.

Mais envisageons le trièdre $OS_0S_0'Z$, en désignant par S_0 la position du Soleil moyen sur la sphère céleste de rayon égal à l'unité, et par OS_0' l'axe perpendiculaire à OS_0 dans l'équateur vrai A ; la projection de la rotation instantanée de ce trièdre sur OZ sera

$$C + \frac{d\alpha_0}{dt},$$

en donnant à C la même signification que ci-dessus ; ou encore

$$\omega - \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}(\theta - H_0),$$

c'est-à-dire finalement

$$\omega - \frac{dH_0}{dt} = n + \lambda_1 + h_1 - m_1 ;$$

il en résulte immédiatement que les projections de la vitesse absolue du point S_0 sur les axes OS_0, OS_0' sont respectivement zéro et $n + \lambda_1 + h_1 - m_1$; en d'autres termes, le mouvement *sidéral* du point S_0 en ascension droite, dans l'équateur vrai A, est uniforme, avec la vitesse constante $n + \lambda_1 + h_1 - m_1$.

Jour solaire moyen. — Le *jour solaire moyen* est l'intervalle de temps nécessaire pour que l'angle horaire H_0 du Soleil moyen augmente de 2π. Il est constant, et peut être pris pour unité de temps : il est clair que sa définition dépend légèrement, mais d'une façon pratiquement insensible, du choix de l'origine du temps, car le coefficient de t dans H change avec cette origine. Nous prendrons pour origine du temps dans tout ce qui suit l'époque 1900, Janvier 0, midi moyen de

Greenwich, et l'unité de temps sera *l'année julienne* de 365,25 jours moyens.

Année tropique. Année sidérale. — *L'année tropique* à l'époque t est le temps nécessaire pour que la partie séculaire de la longitude $\odot$, ou ce qui revient au même de l'ascension droite α, augmente de 2π; cette durée dépend légèrement de l'époque t, car elle est égale à

$$\frac{2\pi}{n + \lambda_1 + h_1 + 2(\lambda_2 + h_2)t}.$$

L'observation facilement répétée pendant des siècles, et combinée avec la théorie, donne pour la durée de l'année tropique en jours moyens

$$365,242\,198\,79 - \frac{614}{10^{10}}\,t,$$

t étant exprimé, comme nous l'avons dit, en années juliennes.

L'année tropique est un peu plus courte que l'année julienne, et c'est ce fait qui a nécessité, comme l'on sait, la réforme grégorienne du calendrier julien.

En 1000 ans, l'année tropique diminue de 5 secondes environ.

D'après ce qui précède, on a l'égalité

$$\frac{2\pi \times 365,25}{n + \lambda_1 + h_1 + 2(\lambda_2 + h_2)t} = 365,242\,198\,79 - \frac{614}{10^{10}}\,t;$$

on en déduit

$$n + \lambda_1 + h_1 = 1\,296\,027'',6813, \qquad \lambda_2 + h_2 = 0'',000\,1089.$$

L'unité étant l'année julienne et non l'année tropique, on a d'ailleurs, d'après le Chapitre XI,

$$h_1 = 50'',2564 \times \frac{365,25}{365,2422} = 50'',2575,$$

et

$$h_2 = 0,000\,111;$$

donc

$$n + \lambda_1 = 1\,295\,977'',4238, \qquad \lambda_2 = -\,0'',000\,002.$$

Le mouvement sidéral diurne à l'époque t a par suite, en divisant par 365,25, pour valeur $3548'',1928 - \frac{1''}{10^8} t$.

L'année sidérale à l'époque t est le temps nécessaire pour que la longitude moyenne du Soleil, rapportée à l'équinoxe fixe γ_0, augmente de 2π ; c'est donc $\frac{2\pi}{n + \lambda_1 + 2\lambda_2 t}$; sa valeur en jours moyens est $365,25636 + \frac{11}{10^{10}} t$.

La constante λ_0 de la longitude du Soleil est égale à $279°41'48'',01$, et par suite la constante $\lambda_0 - k$ de la longitude apparente vaut $279°41'27'',54$.

L'année tropique se numérote comme l'année civile ; on la fait commencer, d'après *Bessel*, au moment voisin du 1er Janvier, et le même pour toute la Terre, où la partie séculaire de la longitude apparente du Soleil, $\odot'$, est égale à 280°. Si, par exemple, on veut calculer l'époque du commencement de l'année 1924, on doit avoir, en tenant compte des révolutions totales effectuées :

$$24 \times 360° + 280° = 279°41'27'',54 + 1\,296\,027'',6813\, t + 0'',000\,1089\, t^2,$$

d'où $t = 24,0003457$, c'est-à-dire 24 années juliennes $+ 0^j,1263$; l'époque cherchée est par suite, en tenant compte des années bissextiles, et en temps moyen de Greenwich, 1924 Janvier 1,1263.

L'année tropique telle que nous venons de la définir est souvent appelée année solaire *fictive* de Bessel.

Rotation de la Terre. — D'après l'expression du temps moyen H_0, on a évidemment

$$\omega - n - \lambda_1 + m_1 - h_1 = 2\pi \times 365,25 ;$$

donc

$$\omega = 2\pi \times 365,25 + 1\,295\,981'',5952.$$

En rapportant la vitesse angulaire ω de la Terre sur elle-même au jour moyen, on a par suite

$$\omega = 1\,299\,548'',2042.$$

Le temps de la révolution de la Terre sur elle-même, qui ne doit pas être confondu avec le jour sidéral, est par suite, en jours moyens, 1 — 0,002 730 336, ou en secondes de temps moyen, 86 164,0990.

Temps sidéral. Jour sidéral. — En un lieu de longitude L par rapport à Greenwich, il est clair que le temps moyen à l'époque t comptée toujours de la même façon, est

$$H_0 = - L + 2\pi \times 365{,}25 \times t,$$

de sorte que la constante locale θ_0 est égale à $\lambda_0 - k - L$.

D'autre part, l'ascension droite du Soleil moyen est, en remplaçant les lettres par leurs valeurs,

$$\alpha_0 = 18^h 38^m 45^s{,}836 + 86\,401^s{,}84542\, t + 9^s{,}315 \frac{t^2}{10^6} + P \cos \varepsilon,$$

la nutation P étant exprimée en temps.

Le temps sidéral local est égal à $\alpha_0 + H_0$; c'est donc

$$\theta = 18^h 38^m 45^s{,}836 - L + (2\pi \times 366{,}25 + 1^s{,}84542)\, t + 9^s{,}315 \frac{t^2}{10^6} + P \cos \varepsilon ;$$

dans cette formule, on aura soin de supprimer les multiples de 2π.

On voit que le temps sidéral est assujetti à une variation séculaire et à une variation périodique très petites toutes les deux : il ne varie pas proportionnellement au temps, ainsi que nous l'avions déjà annoncé.

Le jour sidéral à l'époque t est le temps nécessaire pour que la partie séculaire du temps sidéral θ augmente de 2π ; sa valeur en jours moyens est par suite :

$$\frac{365{,}25}{366{,}25 + \frac{1{,}84542}{86\,400} + \frac{18{,}63}{10^6 \times 86\,400}\, t},$$

c'est-à-dire

$$1 - 0{,}002\,730\,433 - \frac{0{,}59}{10^{12}}\, t.$$

On voit que le terme en t est pratiquement insensible.

Le jour sidéral vaut encore 86 164,0906 secondes de temps moyen.

Inversement, le jour moyen vaut en jours sidéraux 1,002 737 909, ou 86 636,5553 secondes de temps sidéral.

Comme nous l'avons déjà dit, on voit que le jour sidéral ne doit pas être confondu avec le temps de la révolution de la Terre sur elle-même; il ne doit pas être confondu davantage avec le *jour stellaire*, c'est-à-dire avec le temps nécessaire pour que l'angle horaire d'une étoile augmente de 2π : en effet l'ascension droite apparente d'une étoile fixe change avec le temps, et est soumise à des variations tant séculaires que périodiques provenant de la précession et de la nutation; le jour stellaire ne sera donc pas le même que le jour sidéral, et dépendra d'ailleurs des coordonnées de l'étoile.

Temps vrai. — Le temps vrai est l'angle horaire H du soleil; le temps moyen étant H_0, la différence $H_0 - H$, dite *équation du temps* E, est égale à

$$\left(h_2 + \lambda_2 - \frac{m_2}{2}\right) t^2 + C + \rho + \mathfrak{L},$$

en désignant toujours par $\mathfrak{L}$ un groupe de termes périodiques qui dépendent ici des perturbations du Soleil et de la nutation. Remplaçant le coefficient de t^2 par sa valeur numérique, on a donc :

$$E = -0'',0000308\, t^2 + C + \rho + \mathfrak{L}.$$

Equation du temps. — Pour pouvoir étudier de plus près l'équation du temps, complétons d'abord les données numériques déjà indiquées, en donnant les valeurs de l'excentricité et de la longitude du périgée du Soleil, cette dernière étant comptée à partir de l'équinoxe de l'époque t. On a, aux termes périodiques près,

$$\begin{aligned} e &= 0,016\,751\,04 - 0,4180\,\frac{t}{10^6} - 0,126\,\frac{t^2}{10^{10}} \\ &= 3455'',150 - 0'',08621\, t - 2'',60\,\frac{t^2}{10^6}, \\ \varpi &= 281^\circ 13' 15'',0 + 61'',8903\, t + 0'',000\,163\, t^2; \end{aligned}$$

par suite, l'anomalie moyenne du Soleil sera

$$M = 358^\circ 28' 33'',0 + 1\,295\,965'',7910\, t - 0'',000054\, t^2.$$

Le temps nécessaire pour que cette anomalie moyenne augmente de 2π est *l'année anomalistique*; sa valeur en jours moyens sera $365{,}259\,641\,34 + 304\,\frac{t}{10^{10}}$.

Le terme principal de l'équation du centre C est $2e \sin M$; le terme principal de la réduction à l'équateur ρ est $-\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\odot'$, ou en confondant ici $\odot'$ avec $M + \varpi$,

$$-\operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(M + \varpi).$$

On a donc numériquement pour valeur approchée de l'équation du temps dans les années voisines de 1925,

$$E = 461^s \sin M - 592^s \sin (2M + 203^\circ{,}3),$$

d'où :

$$\frac{dE}{dM} = 461^s \cos M - 1184^s \cos (2M + 203^\circ{,}3).$$

L'équation du temps dépendant presque uniquement de l'anomalie moyenne M, varie très sensiblement de la même façon chaque année. Voici cette variation pour 1924 :

L'équation du temps égale à $3^m 12^s$ le 1er Janvier, croît jusqu'au 12 Février, et atteint alors un maximum de $14^m 25^s$; décroissant ensuite, elle s'annule le 15 Avril et devient minima le 14 Mai, égale à $-3^m 47^s$; croissant à nouveau, elle s'annule le 14 Juin, atteint un maximum de $6^m 20^s$ le 26 Juillet, puis décroît, s'annule le 1er Septembre, et devient minima le 3 Novembre, avec la valeur $-16^m 22^s$; recommençant alors à croître, elle s'annule le 25 Décembre.

Lorsque l'équation du temps est positive, le jour compté à partir du midi moyen local paraît plus long l'après-midi que matin; c'est le contraire quand elle est négative : en effet l'heure moyenne locale du midi vrai est égale à E. Ces apparences sont modifiées par l'emploi de l'heure légale.

Saisons. — Le commencement des diverses saisons, printemps, été, automne, hiver, a lieu lorsque la longitude apparente du Soleil est égale à 0°, 90°, 180°, 270°.

Faisons le calcul d'une façon approchée pour 1924.

En tenant compte du mouvement du périgée, les anomalies vraies correspondant au commencement des quatre saisons sont à peu près

$v_1 = 78°,368, \quad v_2 = 168°,364, \quad v_3 = 258°,359, \quad v_4 = 348°,355;$

l'excentricité étant 0,016741, les anomalies moyennes seront

$M_1 = 76°,494, \quad M_2 = 167°,972, \quad M_3 = 260°,243, \quad M_4 = 348°,737.$

D'ailleurs l'anomalie moyenne du Soleil à l'époque 1925, Janvier 1, midi moyen de Greenwich, est $M_0 = 358°,248$.

Les temps écoulés depuis cette époque jusqu'au commencement des diverses saisons sont par suite, en jours moyens

$t_1 = 79,389, \quad t_2 = 172,204, \quad t_3 = 265,823, \quad t_4 = 355,610,$

ce qui correspond, à quelques minutes près, aux époques exactes :

Mars 20, 9^h20^m ; Juin 21, 5^h0^m; Septembre 22, 20^h0^m; Décembre 21, 14^h46^m.

Les durées des saisons sont actuellement en moyenne :

Printemps	92^j20^h,
Été	93^j15^h,
Automne	89^j19^h,
Hiver	$89^j\ 0^h$.

Ces durées changent avec le temps, car elles dépendent surtout, d'après la loi des aires, de la position relative de la ligne des apsides et de celle des équinoxes, c'est-à-dire de la longitude du périgée, qui augmente de plus d'une minute par an; remarquons d'ailleurs que cette augmentation séculaire de ϖ tient à deux causes : la précession qui fournit 50″ environ, et les perturbations planétaires, qui donnent un peu plus de 11″.

Il résulte de l'expression de M que le Soleil est actuellement au périgée dans les environs du 1er Janvier, et par suite à l'apogée vers le 1er Juillet.

CHAPITRE XIV

MOUVEMENT GEOCENTRIQUE DES PLANETES

Énoncé du problème. Définitions. — Nous avons étudié précédemment le mouvement des planètes par rapport au Soleil; connaissant de plus le mouvement du Soleil par rapport à la Terre, il est facile, comme nous l'avons vu, de calculer les coordonnées géocentriques d'une planète à une époque donnée quelconque, et de former ainsi des éphémérides telles qu'en public la Connaissance des Temps pour les grosses planètes.

Nous nous proposons ici de nous rendre compte, au moins d'une façon approchée, des circonstances principales du mouvement géocentrique d'une planète.

Rappelons d'abord qu'il faut faire une distinction entre les planètes qui circulent autour du Soleil en dedans de l'orbite de la Terre, et celles qui circulent en dehors; les premières sont dites *inférieures*, les autres *supérieures*. Les seules planètes inférieures sont Mercure et Vénus.

On dit d'une façon générale que deux astres sont en *conjonction*, en longitude ou en ascension droite, lorsqu'ils ont par rapport à l'observateur même longitude ou ascension droite.

Ils sont en *opposition*, ou bien en *quadrature*, lorsque leurs longitudes ou ascensions droites, suivant les coordonnées employées, diffèrent de 180° ou bien de 90°. Lorsqu'on ne spécifie pas les coordonnées, il faut toujours entendre que le plan fondamental est celui de l'écliptique.

Les signes de la conjonction, de l'opposition, de la quadrature, sont respectivement les suivants : ☌, ☍, □.

Il est clair immédiatement qu'une planète supérieure présente alternativement des conjonctions et des oppositions avec le Soleil ; en désignant par T la Terre, S le Soleil, P la planète, le plan TSP est perpendiculaire au plan de l'écliptique ou de l'équateur (suivant le système de coordonnées) quand ces phénomènes se produisent ; et la latitude ou déclinaison de la planète étant toujours petite ou du moins médiocre, l'angle TSP est obtus ou aigu, suivant qu'il s'agit d'une conjonction ou d'une opposition (*fig.* 60, (*a*), (*b*)).

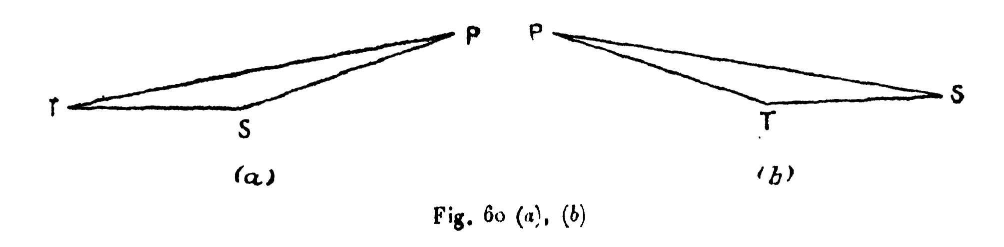


Fig. 60 (*a*), (*b*)

Au contraire, une planète inférieure ne présente pas d'oppositions, mais alternativement deux sortes de conjonctions, suivant encore que l'angle TSP est obtus ou aigu ; dans le premier cas, la conjonction est *supérieure* ; dans le second, elle est *inférieure* (*fig.* 60, (*c*), (*d*)).

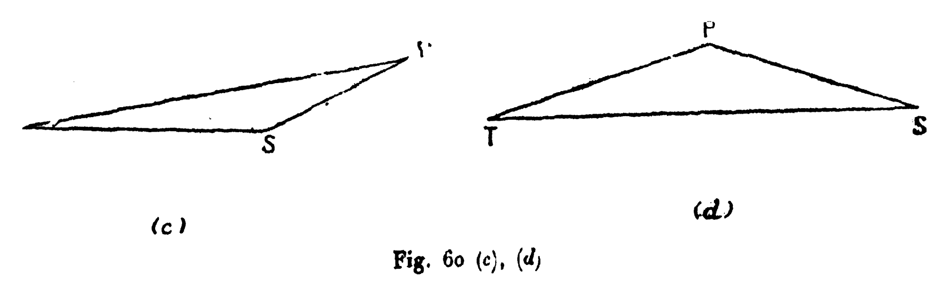


Fig. 60 (*c*), (*d*)

Nous conviendrons, dans ce qui suit, de dire simplement conjonction, quand il s'agira pour une planète inférieure, d'une conjonction supérieure, et de spécifier seulement les conjonctions inférieures.

Le moment le plus favorable pour observer une planète supérieure est évidemment celui de l'opposition, puisqu'alors on la voit la nuit, et qu'elle est le plus rapprochée.

Coordonnées de la planète. Révolution synodique. — Supposons, au moins dans le langage, que le plan fondamental soit celui de l'écliptique ; appelons alors r, λ, β les coordonnées héliocentriques de la planète, rayon vecteur, longitude, latitude ; et de même r', λ', β' ses coordonnées géocentriques ; désignons aussi par r_0, λ_0, β_0 les coordonnées géocentriques du Soleil, en laissant la latitude β_0 quelconque, afin que les formules s'appliquent aussi bien aux coordonnées équatoriales, en faisant seulement les modifications de noms nécessaires.

On a les formules connues

$$\left\{\begin{aligned} r'\cos\beta'\cos\lambda' &= r\cos\beta\cos\lambda + r_0\cos\beta_0\cos\lambda_0,\\ r'\cos\beta'\sin\lambda' &= r\cos\beta\sin\lambda + r_0\cos\beta_0\sin\lambda_0,\\ r'\sin\beta' &= r\sin\beta + r_0\sin\beta_0.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'une conjonction, les trois longitudes λ, λ_0, λ' sont égales (à un multiple de 2π près) ; dans le cas d'une opposition ou d'une conjonction inférieure, la différence $\lambda - \lambda_0$ est égale à π, et l'on a $\lambda' = \lambda$ ou bien $\lambda' = \lambda_0$.

La longitude λ, suivie d'une façon continue, peut se mettre comme nous le savons, sous la forme $nt + \varepsilon + P + \mathfrak{P}$, en désignant par n le moyen mouvement de la planète, par ε la longitude moyenne de l'époque, par P la somme de l'équation du centre et de la réduction à l'écliptique, par $\mathfrak{P}$ les perturbations ; de la même façon, la longitude λ_0 est de la forme analogue $n_0 t + \varepsilon_0 + P_0 + \mathfrak{P}_0$.

Il en résulte que les conjonctions sont des phénomènes périodiques, dont la période est $\frac{2\pi}{|n - n_0|}$, leurs époques vraies pouvant s'écarter des époques moyennes d'une quantité toujours limitée, et assez petite quand il s'agit des grosses planètes.

Quant aux oppositions, ou conjonctions inférieures, elles présentent la même périodicité, leurs époques moyennes étant les milieux des intervalles qui séparent les conjonctions successives.

Cette période $\frac{2\pi}{|n - n_0|}$, ou T', est la *révolution synodique* de la planète. Si les durées des révolutions sidérales de la

planète et de la Terre autour du Soleil sont respectivement T et T_0, on peut écrire aussi

$$\frac{1}{T'} = \left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right|.$$

On a $T_0 = 365^j,256$, et pour les grosses planètes

	T	T'
Mercure	$87^j,969$	$115^j,88$
Vénus	224 ,701	583 ,92
Mars	686 ,980	779 ,94
Jupiter	4 332 ,589	398 ,88
Saturne	10 759 ,23	378 ,09
Uranus	30 688 ,45	369 ,66
Neptune	60 181 ,3	367 ,49

Elongation. Parallaxe. — Considérons les deux quantités suivantes : 1° la différence $\lambda' - \lambda_0$ des longitudes géocentriques de la planète et du Soleil, ou *élongation* de la planète ; 2° la différence $\lambda' - \lambda$ des longitudes géocentrique et héliocentrique de la planète, ou *parallaxe* (*annuelle*) de celle-ci.

Une transformation déjà indiquée donne immédiatement

$$\operatorname{tg}(\lambda' - \lambda_0) = \frac{r \cos\beta \sin(\lambda - \lambda_0)}{r_0 \cos\beta_0 + r\cos\beta\cos(\lambda - \lambda_0)},$$

et l'on sait de plus que le dénominateur du second membre a même signe que $\cos(\lambda' - \lambda_0)$; de même

$$\operatorname{tg}(\lambda' - \lambda) = \frac{r_0 \cos\beta_0 \sin(\lambda_0 - \lambda)}{r\cos\beta + r_0\cos\beta_0\cos(\lambda_0 - \lambda)}.$$

Supposons alors en premier lieu qu'il s'agisse d'une planète inférieure : il est clair que dans ce cas le dénominateur de l'expression de $\operatorname{tg}(\lambda' - \lambda_0)$ reste constamment positif, de sorte que l'élongation, qui varie d'une façon continue avec λ' et λ_0, reste inférieure à $\frac{\pi}{2}$, en valeur absolue, si on l'a choisie ainsi à l'origine du temps. Il en résulte que la longitude λ' ne s'écarte jamais beaucoup de λ_0, et a le même moyen mouvement que λ_0, c'est-à-dire n_0.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une planète supérieure : on peut répéter le même raisonnement sur la parallaxe $\lambda' - \lambda$, de sorte que la longitude λ' ne s'écarte jamais beaucoup de λ, et a le même moyen mouvement n que λ.

Variation de la longitude, de l'élongation et de la parallaxe. — Pour nous rendre compte d'une façon approchée de la façon dont varient la longitude géocentrique, l'élongation et la parallaxe d'une planète P, nous supposerons simplement que cette planète est animée d'un mouvement circulaire et uniforme autour du Soleil comme centre, dans le plan de l'écliptique, et nous ferons la même hypothèse sur le mouvement de la Terre : en d'autres termes, nous négligerons les excentricités, les inclinaisons et les perturbations des orbites; l'approximation ainsi obtenue sera assez grossière évidemment, suffisante cependant pour expliquer les apparences principales des mouvements des planètes, telles que nous les observons.

Avec ces hypothèses, on a simplement

$$\lambda = nt + \varepsilon, \quad \lambda_0 = n_0 t + \varepsilon_0, \quad \beta = \beta_0 = \beta' = 0,$$
$$r' \cos \lambda' = r \cos \lambda + r_0 \cos \lambda_0,$$
$$r' \sin \lambda' = r \sin \lambda + r_0 \sin \lambda_0;$$

de plus r et r_0 sont constants, et d'après la troisième loi de Képler, on a, en négligeant encore les masses de la planète et de la Terre devant celle du Soleil, la relation

$$n^2 r^3 = n_0^2 r_0^3.$$

Les formules ci-dessus donnent

$$r'^2 \frac{d\lambda'}{dt} = nr^2 + n_0 r_0^2 + (n + n_0) r r_0 \cos(\lambda - \lambda_0);$$

or il est facile de vérifier l'inégalité

$$nr^2 + n_0 r_0^2 < (n + n_0) r r_0;$$

ceci revient en effet à

$$(nr - n_0 r_0)(r - r_0) < 0,$$

ou bien

$$(n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2)(r - r_0) < 0,$$

ou bien encore, d'après la relation entre n, n_0, r, r_0,

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)(r - r_0) < 0,$$

ce qui est évident.

Si donc on désigne par σ l'angle positif aigu dont le cosinus est égal à $\frac{nr^2 + n_0 r_0^2}{rr_0(n + n^0)}$, on voit que la longitude λ' sera généralement croissante, sauf dans les intervalles limités par les valeurs $(2k + 1)\pi - \sigma$, $(2k + 1)\pi + \sigma$, de la différence $\lambda - \lambda_0$, en appelant k un entier quelconque.

Quand la longitude λ' est croissante, la planète se déplace dans le sens direct à travers les étoiles; quand au contraire cette longitude est décroissante, la planète se déplace dans le sens rétrograde, et l'on dit qu'elle est dans sa période de *rétrogradation*. Au moment du maximum ou du minimum de longitude, la planète est *stationnaire*. Le mouvement de la planète est toujours direct à la conjonction, rétrograde à l'opposition ou à la conjonction inférieure.

La période des stations est la révolution synodique.

Pour étudier l'élongation et la parallaxe, écrivons ici

$$r' \sin(\lambda' - \lambda_0) = r \sin(\lambda - \lambda_0), \qquad r' \sin(\lambda' - \lambda) = r_0 \sin(\lambda_0 - \lambda),$$
$$r' \cos(\lambda' - \lambda_0) = r_0 + r \cos(\lambda - \lambda_0), \quad r' \cos(\lambda' - \lambda) = r + r_0 \cos(\lambda_0 - \lambda),$$

d'où

$$r'^2 \frac{d(\lambda' - \lambda_0)}{dt} = r(n - n_0)\,[r + r_0 \cos(\lambda - \lambda_0)],$$
$$r'^2 \frac{d(\lambda' - \lambda)}{dt} = r_0(n_0 - n)\,[r_0 + r \cos(\lambda_0 - \lambda)].$$

S'il s'agit d'une planète inférieure, de sorte que $r < r_0$, $n > n_0$, la parallaxe va donc toujours en diminuant, tandis que l'élongation oscille entre un maximum D et un minimum — D; l'angle aigu D est la digression de la planète. Au moment d'une digression, les formules montrent que la parallaxe est égale à $\pm \frac{\pi}{2}$, et par la relation

$$\frac{\sin(\lambda' - \lambda_0)}{\sin(\lambda' - \lambda)} = -\frac{r}{r_0},$$

on voit que

$$\sin D = \frac{r}{r_0}, \quad \lambda' - \lambda_0 = \pm D, \quad \lambda' - \lambda = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Dans le cas d'une planète supérieure, c'est l'élongation qui va toujours en diminuant (c'est-à-dire que la planète s'éloigne toujours du Soleil vers l'Ouest), tandis que la parallaxe oscille entre un maximum Q et un minimum — Q, l'angle Q étant aigu ; au moment de la parallaxe maxima ou minima, la planète est en quadrature avec le Soleil, et l'on a

$$\sin Q = \frac{r_0}{r}, \quad \lambda' - \lambda = \pm Q, \quad \lambda' - \lambda_0 = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Rayon vecteur. — En conservant toujours les mêmes hypothèses, le rayon vecteur se calcule immédiatement :

$$r'^2 = r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos(\lambda - \lambda_0) ;$$

il varie régulièrement entre $r + r'$ et $| r - r' |$; il est maximum à la conjonction, minimum à l'opposition ou à la conjonction inférieure.

Ainsi que nous l'avons dit, tous les résultats précédents ne sont qu'approchés : il suffira de consulter une éphéméride pour se rendre compte cependant qu'ils correspondent d'une façon suffisante à la réalité.

Diamètre apparent et parallaxe. — Les planètes peuvent être regardées comme des corps sphériques, quoique Jupiter et Saturne aient un aplatissement sensible.

Si k désigne le rayon linéaire de la planète, son demi-diamètre apparent δ à la distance d est défini par la relation

$$k = d \sin \delta,$$

comme le montre la figure 61. Si δ_0 est le demi-diamètre apparent à la distance choisie comme unité, le rayon linéaire k est donc $\sin \delta_0$: on peut d'ailleurs toujours confondre les angles δ et δ_0 avec leurs sinus.

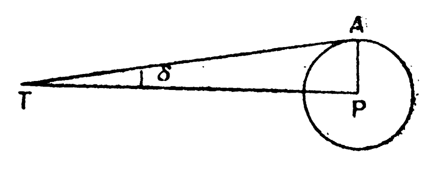


Fig. 61

Si de même a désigne le rayon équatorial terrestre, la pa-

rallaxe (diurne) horizontale équatoriale de la planète à la distance d, soit ϖ, est définie par la relation

$$a = d \sin \varpi,$$

de sorte que le rapport $\frac{\sin \delta'}{\sin \varpi}$, ou simplement $\frac{\delta}{\varpi}$, est constant, égal à $\frac{k}{a}$.

Phases. — Les planètes ne sont pas lumineuses par elles-mêmes ; elles présentent donc des *phases* comme la Lune.

Soient S, T, P le Soleil, la Terre et la planète (*fig.* 62) ; menons les diamètres AB, CD de la section Σ de la planète par le plan des trois corps, perpendiculairement à SP et TP ; les distances SP et TP étant très grandes par rapport aux dimensions de la planète, on peut dire que la partie éclairée est la demi-sphère se projetant en ACB, tandis que la partie visible est la demi-sphère se projetant en CBD. La partie éclairée visible est donc le fuseau projeté en BPC.

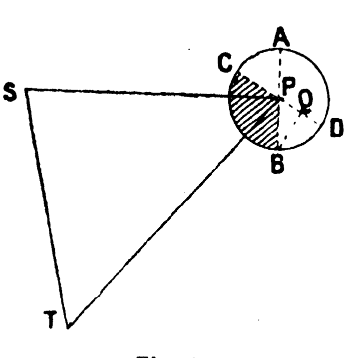


Fig. 62

Si BQ est perpendiculaire sur CD, la largeur de ce fuseau, tel qu'on le voit, est CQ, et si φ est l'angle SPT à la planète, le rapport de cette largeur au diamètre apparent CD est

$$\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi).$$

Ce fuseau se projette d'ailleurs orthographiquement, tel qu'on le voit, sur le plan perpendiculaire à Σ passant par CD, suivant une surface limitée par un demi-cercle et une demi-ellipse, dont l'aire est évidemment aussi $\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$, en prenant pour unité l'aire totale de Σ. On peut donc regarder le nombre

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) = \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

comme mesure de la phase, celle-ci étant égale à l'unité quand le disque de la planète paraît complètement éclairé.

Soient, comme précédemment, r, r_0, r' les trois côtés SP, TS, TP du triangle TSP ; on a encore

$$\Phi = \frac{(r + r')^2 - r_0^2}{4rr'},$$

et par suite, si l'on regarde r et r_0 comme constants, en négligeant les excentricités des orbites,

$$\frac{d\Phi}{dr'} = \frac{r'^2 - r^2 + r_0^2}{4rr'^2}.$$

Pour une planète inférieure, r' varie entre $r_0 - r$ à la conjonction inférieure jusqu'à $r_0 + r$ à la conjonction supérieure ; et l'on voit que la phase grandit constamment depuis o jusqu'à 1, entre ces deux limites.

Pour une planète supérieure, r' varie entre $r - r_0$ à l'opposition jusqu'à $r + r_0$ à la conjonction ; la phase est égale à 1 dans chacun de ces cas, et passe par un minimum lorsqu'on a

$$r'^2 - r^2 + r_0^2 = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'angle STP est droit : la planète est alors sensiblement en quadrature avec le Soleil.

La phase minima est

$$\Phi_0 = \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{2r};$$

pour Mars cette valeur est environ $\frac{7}{8}$; pour Jupiter elle est $\frac{99}{100}$, de sorte que les phases sont presque insensibles à la distance de cette planète.

Eclat. — La planète étant uniquement éclairée par le Soleil, son éclat, pour un observateur terrestre, doit être regardé comme proportionnel à la surface éclairée visible, telle qu'elle se projette sur le ciel, et comme inversement proportionnel au carré de sa distance au Soleil ainsi qu'au carré de sa distance à la Terre.

En gardant les mêmes notations, la mesure de l'éclat est donc

$$E = C \frac{(r + r')^2 - r_0^2}{r^3 r'^2},$$

C désignant une constante qui dépend de l'unité d'éclat choisie.

Supposant encore r et r_0 constants, on a aussi

$$\frac{dE}{dr'} = -C \frac{r'^2 + 4rr' + 3r^2 - 3r_0^2}{r^3 r'^4}.$$

Pour une planète supérieure, cette dérivée est toujours négative, et l'éclat diminue constamment depuis l'opposition jusqu'à la conjonction.

Pour une planète inférieure, l'éclat qui est nul au moment de la conjonction inférieure, passe par un maximum lorsqu'on a

$$r' = -2r + \sqrt{r^2 + 3r_0^2},$$

si toutefois cette valeur est comprise entre les valeurs extrêmes de r', savoir $r_0 - r$ et $r_0 + r$, ce qui exige la condition

$$r > \frac{r_0}{4}.$$

Dans le cas de Vénus, on trouve ainsi en prenant les valeurs moyennes $r = 0{,}7233$, $r_0 = 1$:

$$r' = 0{,}430, \quad \widehat{STP} = 39^\circ{,}7 \quad \widehat{TSP} = 22^\circ{,}3.$$

CHAPITRE XV

MOUVEMENT DE LA LUNE ET DES SATELLITES

Mouvement de la Lune. — La théorie du mouvement de la Lune autour de la Terre présente de grandes difficultés, à cause de l'importance de l'action du Soleil, et on ne peut pas la traiter exactement comme celle des planètes. On peut toujours dire cependant, dans une première approximation, que la Lune décrit autour de la Terre une ellipse variable dont la Terre occupe un des foyers ; mais les perturbations de ce mouvement sont considérables.

L'inclinaison de cette orbite a pour valeur moyenne $5^\circ 9'$, et varie entre $5^\circ 0'$ et $5^\circ 18'$.

L'excentricité vaut en moyenne 0,0549, tandis que le demi-grand axe est égal à 60,3 rayons équatoriaux terrestres.

Mais la longitude du nœud ascendant et celle du périgée varient rapidement avec le temps : la ligne des nœuds décrit l'écliptique mobile entière, dans le sens rétrograde, d'un mouvement sensiblement uniforme, en $6798^j,36$, soit 18 ans $\frac{2}{3}$ environ ; la ligne des apsides fait de même, dans le sens direct, et en $3231^j,48$, soit un peu moins de 9 ans.

Enfin, la Lune elle-même décrit son orbite en $27^j 7^h 43^m$ environ.

Il est nécessaire de porter plus loin la précision pour se rendre un compte suffisamment exact du mouvement de la Lune.

En fait, la théorie et les tables construites d'après la théorie et les observations, fournissent directement les trois coordonnées suivantes de la Lune

1° sa longitude géocentrique apparente λ;
2° sa latitude géocentrique apparente β;
3° sa parallaxe horizontale équatoriale ϖ.

Cette dernière coordonnée est équivalente au rayon vecteur r, puisque, si a désigne le rayon équatorial de la Terre, on a $\sin \varpi = \frac{a}{r}$.

Voici maintenant comment se présentent ces quantités.

La longitude λ est de la forme

$$\lambda = \lambda_0 + nt + n't^2 + n''t^3 + \mathrm{P},$$

λ_0, n, n', n'' étant des constantes, et P une somme de termes périodiques.

La latitude β est elle-même une somme de termes périodiques.

La parallaxe ϖ est égale à une constante ϖ_0' augmentée d'une somme de termes périodiques.

De ces expressions, on peut conclure les éléments elliptiques osculateurs à chaque instant. En particulier, la longitude du nœud, ☊, est de la forme

$$☊ = ht + h't^2 + h''t^3 + \mathrm{P}',$$

h, h', h'' étant des constantes, P′ une somme de termes périodiques ; de même la longitude du périgée, σ, est de la forme

$$\sigma = gt + g't^2 + g''t^3 + \mathrm{P}'',$$

g, g', g'' étant des constantes, P″ une somme de termes périodiques. Ces longitudes sont d'ailleurs, comme λ, supposées rapportées à l'équinoxe vrai.

Si l'on fait abstraction des termes périodiques, on obtient les *longitudes moyennes* de la Lune, de son nœud ascendant et de son périgée. Ces longitudes sont sensiblement proportionnelles au temps, car les termes en t^2 sont très petits ; leurs coefficients n', h', g', rapportés au siècle comme unité de temps, sont les coefficients des *accélérations séculaires* des trois longitudes considérées. Les termes en t^3 sont presque négligeables.

D'après les tables du mouvement de la Lune de E.-W. Brown, on a, en prenant l'année julienne pour unité de temps,

et en fixant l'origine du temps à l'époque 1900 janvier 0,0 temps moyen de Greenwich,

$$\lambda = 270°26'11'',71 + (13 \times 360° + 477\,644'',0606)\,t + 7'',14\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0'',0068\left(\frac{t}{100}\right)^3 + P,$$

$$\Omega = 259°10'59'',79 - 69\,629'',1123\,t + 7'',48\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0'',008\left(\frac{t}{100}\right)^3 + P',$$

$$\varpi = 334°19'46'',40 + 146\,485'',2252\,t - 37'',17\left(\frac{t}{100}\right)^2 - 0'',045\left(\frac{t}{100}\right)^3 + P''.$$

Les moyens mouvements diurnes de ces trois longitudes sont par suite, respectivement,

$$13°10'35'',03\,;\ -3'10'',63\,;\ +6'41'',05.$$

La *révolution tropique* de la Lune, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la longitude moyenne augmente de 2π, est de $27^j,32158$ ou $27^j7^h43^m5^s$.

La *révolution sidérale* de la Lune est le temps nécessaire pour que sa longitude moyenne, rapportée à un équinoxe fixe, augmente de 2π ; elle vaut donc, en tenant compte de la précession, $27^j,32166$ ou $27^j7^h43^m11^s$.

La *révolution anomalistique* de la Lune est le temps qui sépare deux passages consécutifs au périgée, soit $27^j,55455$ ou $27^j13^h18^m33^s$.

La *révolution draconitique* de la Lune est le temps qui sépare deux passages consécutifs au nœud ascendant, soit $27^j,21222$ ou $27^j5^h5^m36^s$.

La *constante de la parallaxe lunaire* est l'angle ϖ_0 tel que $\sin \varpi_0$ soit égal à la partie constante du développement de $\sin \varpi$ ou $\frac{a}{r}$, c'est-à-dire encore à la valeur moyenne de cette quantité. Elle est égale à $57'2'',70$, et par suite la valeur moyenne de $\sin \varpi$ est, en arc, $57'2'',54$. La distance moyenne r_0 de la Lune à la Terre est définie par l'égalité $\frac{a}{r_0} = \sin \varpi_0$, et vaut 60,27 rayons équatoriaux. La parallaxe ϖ varie entre 52' et 62', en gros.

Le terme principal de la latitude de la Lune est proportion-

nel à sin $(\lambda - \Omega)$; on a d'ailleurs toujours

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \Omega),$$

en désignant par i l'inclinaison, dont nous avons déjà indiqué la variation.

Parmi les nombreuses inégalités périodiques de la longitude λ, on distingue principalement *l'équation du centre*, dont la partie principale est $6^\circ 17' \sin(\lambda - \varpi)$; *l'évection*, dont la valeur approchée est $1^\circ 16' \times \sin(\lambda - 2\lambda' + \varpi)$, en désignant par λ' la longitude du Soleil ; la *variation*, égale en gros à $39',5 \sin 2(\lambda - \lambda')$; *l'équation annuelle*, de la forme $-11' \sin(\lambda' - \varpi')$, en désignant par ϖ' la longitude du périgée solaire.

Mouvement synodique de la Lune. Phases. — La Lune est un corps très sensiblement sphérique, qui reçoit la lumière du Soleil : par suite, elle présente des phases, que l'on peut étudier comme nous avons fait pour les planètes. Le mouvement de la Lune par rapport au Soleil s'obtient immédiatement ; il est clair que λ' désignant la longitude du Soleil, la différence $\lambda - \lambda'$ va constamment en augmentant. La *révolution synodique* de la Lune est le temps nécessaire pour que la valeur moyenne de cette différence augmente de 2π : sa valeur est facile à calculer, et égale à $29^j,53059$ ou $29^j 12^h 44^m 3^s$.

Quand le Soleil et la Lune sont en conjonction (nouvelle Lune), ou en opposition (pleine Lune) en longitude, on est aux *syzygies* ; quand la différence de leurs longitudes est égale à $\pm 90^\circ$, on est aux *quadratures* (premier ou dernier quartier).

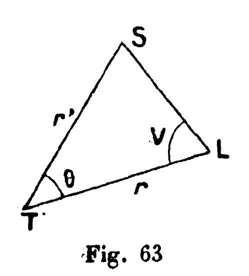


Fig. 63

Pour déterminer avec exactitude la phase, il faut, comme nous l'avons vu à propos des planètes, connaître l'angle à la Lune, V : il est toujours facile à calculer, car si r et r' sont les distances géocentriques de la Lune et du Soleil, et si θ est la distance angulaire géocentrique des deux astres, on a successivement d'une façon évidente (*fig.* 63)

$$\cos\theta = \cos\beta \cos(\lambda - \lambda'), \qquad \operatorname{tg} V = \frac{\sin\theta}{\frac{r}{r'} - \cos\theta}.$$

Dimensions et diamètre apparent de la Lune. — Le demi-diamètre apparent de la Lune, à la distance moyenne à la Terre, est de 15′34″,09. Si δ_0 désigne cette valeur, le demi-diamètre δ correspondant à une parallaxe ϖ sera donné par la formule

$$\sin \delta = \sin \varpi \frac{\sin \delta_0}{\sin \varpi_0}.$$

Le rapport constant $\frac{\sin \delta}{\sin \varpi}$ serait égal au rayon linéaire de la Lune (l'unité étant le rayon équatorial terrestre), si le demi-diamètre apparent n'était pas augmenté par l'irradiation. L'observation des éclipses montre en effet qu'en réalité la valeur de δ_0 doit être prise égale à 15′31″,87. On en déduit pour le rayon k de la Lune

$$\log k = \bar{1},435006, \qquad k = 0,272274 \qquad \text{ou } \frac{3}{11} \text{ sensiblement.}$$

Remarquons en passant que le même fait se produit pour le Soleil ; le demi-diamètre apparent à la distance moyenne à la Terre est de 16′1″,18, mais doit être réduit, à cause de l'irradiation, à 15′59″,63, ce qui donne 109 pour le rayon linéaire du Soleil.

Libration de la Lune. — La Lune, comme tous les corps célestes, a un mouvement de rotation sur elle-même, que l'on peut définir de la façon générale suivante. Prenons comme centre O de la sphère céleste le centre de la Lune, et soit xy la trace du plan fondamental de coordonnées, par exemple celui de l'écliptique (*fig.* 64). Prenons d'autre part des axes rectangulaires $Ox'y'z'$, orientés comme les axes fixes, et invariablement liés à la Lune ; et soit $x'y'$ la trace du plan $Ox'y'$, choisi comme *équateur lunaire* : les axes Ox', Oy', Oz' sont d'ailleurs les axes principaux d'inertie de la Lune, et si A, B, C sont les moments d'inertie correspondants, on a $A < B < C$.

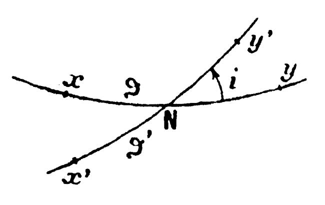


Fig 64

Soit N l'un des nœuds de l'équateur lunaire par rapport à xy ; on peut définir le mouvement de rotation de la Lune par les

arcs $\widehat{xN} = \Omega$, $\widehat{x'N} = \Omega'$, et par l'inclinaison i de $x'y'$ par rapport à xy, comptée dans le sens convenable.

Les lois de Cassini et la Mécanique céleste nous apprennent alors que : 1° si N est le nœud descendant de l'équateur lunaire, de sorte que l'angle i soit négatif et aigu, la longitude de N est toujours extrêmement voisine de celle du nœud ascendant de l'orbite de la Lune (ou ce qui revient au même, de celle du nœud ascendant de l'orbite relative de la Terre par rapport à la Lune), et l'angle i reste sensiblement constant, égal à $-1°31'22''$; 2° l'axe Ox' reste toujours dirigé vers la Terre, c'est-à-dire que la différence $\Omega - \Omega'$ ne diffère que par des termes périodiques très petits de la longitude moyenne de la Lune augmentée de 180°.

Cette petite différence constitue la *libration physique* ou *réelle* de la Lune, que nous n'avons pas à étudier.

Il résulte de ces lois que la Lune tourne toujours à très peu près la même face vers la Terre. Pour étudier d'une façon plus précise ce phénomène, considérons un point de la Terre, pour lequel λ et β seront la longitude et la latitude du centre de la Lune, et cherchons les coordonnées angulaires, λ', β' de ce même point, vu du centre de la Lune, rapportées aux axes Ox', Oy', Oz' ; d'après ce qui précède, ces coordonnées resteront toujours petites ; elles définiront la *libration apparente* ou *optique* de la Lune pour le point de la Terre considéré. Il suffit, pour les obtenir, d'appliquer les formules générales du changement de coordonnées : comme l'angle i est petit, on prendra les formules (26) du Chapitre III, en remplaçant ψ, θ, ψ', θ', σ, σ', respectivement par $\pi + \lambda$, $-\beta$, λ', β', Ω, Ω', car la longitude et la latitude sélénocentriques du point considéré sont précisément $\pi + \lambda$ et $-\beta$; d'ailleurs Ω est précisément la longitude du nœud ascendant de la Lune, d'une façon au moins très approchée.

On a ainsi, en développant jusqu'au second ordre par rapport à i, et négligeant encore les termes en $i^2 \operatorname{tg} \beta$ à cause de la petitesse de β,

$$\begin{cases} \lambda' = \pi + \lambda - (\Omega - \Omega') + i \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda - \Omega) - \dfrac{i^2}{4} \sin 2(\lambda - \Omega), \\ \beta' = -\beta + i \sin(\lambda - \Omega). \end{cases}$$

Si l'on suppose que λ et β se rapportent au centre de la Terre, on a ainsi la *libration en longitude* et la *libration en latitude* : la première peut atteindre environ 8° en valeur absolue, la seconde 6°45'.

Si λ et β se rapportent à un point de la surface de la Terre, il faut en outre les affecter de la parallaxe, ce qui conduit à la *libration diurne*.

Ces résultats nous montrent quelle est l'étendue de la surface de la Lune qu'on peut apercevoir : c'est à chaque instant l'hémisphère qui a pour pôle le point de coordonnées λ', β'.

Satellites. — Nous n'étudierons pas ici le mouvement des satellites par rapport aux planètes dont ils dépendent : nous supposerons ce mouvement connu, et nous dirons seulement qu'on peut le regarder comme un mouvement elliptique, mais le plus souvent avec de fortes perturbations.

Le problème que nous nous proposons de résoudre consiste simplement dans la détermination du mouvement apparent des satellites, tel que nous pouvons l'observer. Pour y arriver, et obtenir en même temps des formules qui peuvent servir dans quelques autres questions, nous devons envisager le problème général suivant. Soient T la Terre, S et S' deux astres voisins ; par rapport à des axes Tx, Ty, Tz (orientés dans le sens direct), les coordonnées de S sont r, ψ, θ ; par rapport à d'autres axes Sx'', Sy'', Sz'', orientés de la même façon, mais non parallèles aux premiers, les coordonnées de S' sont r'', ψ'', θ'' ; on demande de déterminer la position relative de S' et de S pour l'observateur placé en T.

Si r', ψ', θ' sont les coordonnées de S' par rapport à Tx, Ty, Tz, tout revient à déterminer les différences de coordonnées $\Delta\psi = \psi' - \psi$, $\Delta\theta = \theta' - \theta$, ou bien encore la distance apparente s de S et S', et l'angle de position χ de S' par rapport à S, compté comme nous l'avons déjà fait, dans le sens rétrograde de Sz vers SS' (*fig.* 65).

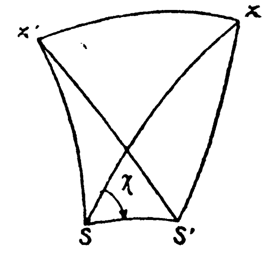


Fig. 65

Menons par T des axes Tx', Ty', Tz', parallèles aux axes Sx'', Sy'', Sz'' ; définissons la position rela-

tive des deux trièdres $Txyz$, $Tx'y'z'$ comme au Chapitre III, et cherchons d'abord les coordonnées angulaires de la direction TS par rapport à Tx', Ty', Tz'; en les appelant ψ_1, θ_1, et désignant par S l'angle à l'astre, on a immédiatement

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\theta_1 \sin(\psi_1 - \sigma') = \sin i \sin\theta + \cos i \cos\theta \sin(\psi - \sigma), \\ \cos\theta_1 \cos(\psi_1 - \sigma') = \cos\theta \cos(\psi - \sigma), \\ \sin\theta_1 = \cos i \sin\theta - \sin i \cos\theta \sin(\psi - \sigma), \\ \cos\theta_1 \sin S = \sin i \cos(\psi - \sigma), \\ \cos\theta_1 \cos S = \cos i \cos\theta + \sin i \sin\theta \sin(\psi - \sigma). \end{cases}$$

Appelons de la même façon ψ'_1, θ'_1 les coordonnées angulaires de la direction TS' par rapport à $Tx'y'z'$; on aura évidemment les relations

$$\begin{cases} r' \cos\psi'_1 \cos\theta'_1 = r \cos\psi_1 \cos\theta_1 + r'' \cos\psi'' \cos\theta'', \\ r' \sin\psi'_1 \cos\theta'_1 = r \sin\psi_1 \cos\theta_1 + r'' \sin\psi'' \cos\theta'', \\ r' \sin\theta'_1 = r \sin\theta_1 + r'' \sin\theta''. \end{cases}$$

Maintenant, le triangle $SS'z'$ donne

$$\begin{cases} \sin s \sin(\chi + S) = \cos\theta'_1 \sin(\psi'_1 - \psi_1), \\ \sin s \cos(\chi + S) = \cos\theta_1 \sin\theta'_1 - \sin\theta_1 \cos\theta'_1 \cos(\psi'_1 - \psi_1); \end{cases}$$

et d'après les relations précédentes, ceci devient

$$\begin{cases} \sin s \sin(\chi + S) = \dfrac{r''}{r'} \cos\theta'' \sin(\psi'' - \psi_1), \\ \sin s \cos(\chi + S) = \dfrac{r''}{r'} [\cos\theta_1 \sin\theta'' - \sin\theta_1 \cos\theta'' \cos(\psi'' - \psi_1)]; \end{cases}$$

de plus

$$r'^2 = r^2 + 2rr'' [\sin\theta_1 \sin\theta'' + \cos\theta_1 \cos\theta'' \cos(\psi'' - \psi_1)] + r''^2.$$

Si enfin nous supposons qu'on puisse négliger les quantités du troisième ordre par rapport à $\dfrac{r''}{r'}$, et par suite par rapport à s, on a définitivement

$$(2)\quad \begin{cases} s \sin(\chi + S) = k \dfrac{r''}{r} \cos\theta'' \sin(\psi'' - \psi_1), \\ s \cos(\chi + S) = k \dfrac{r''}{r} [\cos\theta_1 \sin\theta'' - \sin\theta_1 \cos\theta'' \cos(\psi'' - \psi_1)], \\ \text{avec} \quad k = 1 - \dfrac{r''}{r} [\sin\theta_1 \sin\theta'' + \cos\theta_1 \cos\theta'' \cos(\psi'' - \psi_1)]. \end{cases}$$

On peut ainsi calculer s et χ, puisqu'on a déja obtenu ψ_1, θ_1, S par les formules (1).

Pour avoir aussi $\Delta\psi$ et $\Delta\theta$, on considérera le triangle zSS', qui donne avec la même approximation que ci-dessus

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta\psi = s \sin\chi \operatorname{séc}\theta\,(1 + s\cos\chi \operatorname{tg}\theta), \\ \Delta\theta = s\cos\chi - \dfrac{s^2}{2}\sin^2\chi \operatorname{tg}\theta, \end{cases}$$

d'après les formules (31) du Chapitre III; le plus souvent d'ailleurs, les termes en s^2 sont négligeables.

Il est facile de comprendre maintenant l'usage des formules précédentes pour le mouvement des satellites. Supposons par exemple que ψ et θ sont les coordonnées équatoriales α et δ; S est le centre d'une planète P; S' est un satellite; le plan S$x''y''$ est celui de l'orbite du satellite par rapport à la planète, et Sx'' est la direction du nœud ascendant de cette orbite par rapport à l'équateur. Dans ces conditions, on a $\theta'' = 0$, et ψ'' est la longitude l du satellite dans son orbite, comptée à partir du nœud ascendant. Si alors i et $\Im$ désignent l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'orbite du satellite par rapport à l'équateur, on a $\sigma = \Im$, $\sigma' = 0$, et i garde sa signification, de sorte que, finalement, on a l'ensemble de formules suivantes, en remplaçant θ_1 et ψ_1 par j et f,

$$\begin{cases} \cos j \sin f = \sin i \sin\delta + \cos i \cos\delta \sin(\alpha - \Im), \\ \cos j \cos f = \cos\delta \cos(\alpha - \Im), \\ \quad\sin j = \cos i \sin\delta - \sin i \cos\delta \sin(\alpha - \Im), \\ \cos j \sin S = \sin i \cos(\alpha - \Im), \\ \cos j \cos S = \cos i \cos\delta + \sin i \sin\delta \sin(\alpha - \Im); \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \sin(\chi + S) = k\dfrac{r''}{r}\sin(l - f), \\ s\cos(\chi + S) = -k\dfrac{r''}{r}\sin j \cos(l - f), \\ \qquad k = 1 - \dfrac{r''}{r}\cos j \cos(l - f). \end{cases}$$

On emploierait de la même façon les coordonnées écliptiques.

Les quantités j, f, s varient beaucoup plus lentement que l; on peut donc, au moins pendant un certain temps, les regarder comme constantes, et ne faire attention qu'à la variation de l.

Les dernières formules écrites montrent alors que le satellite semble décrire, d'une façon approchée, autour de la planète une petite ellipse de demi-axes $\frac{r''}{r}$ et $\frac{r''}{r}\sin j$.

Le satellite est à *l'élongation*, c'est-à-dire que sa distance à la planète est maxima, pour $l = f \pm \frac{\pi}{2}$, du moins en négligeant la variation de r''.

Satellites de Jupiter. — Les quatre premiers satellites de Jupiter ont des orbites très peu inclinées sur l'écliptique, et l'orbite de Jupiter est elle-même dans ce cas. On voit donc, en prenant les coordonnées écliptiques comme coordonnées fondamentales, que j est petit, et que l'angle de position χ reste par suite voisin de $\pm \frac{\pi}{2}$; il en résulte que ces satellites paraissent décrire une même ligne droite passant par le centre de la planète, au moins d'une façon approchée.

Anneau de Saturne. — Un bord de l'anneau de Saturne peut être regardé comme l'orbite circulaire d'un satellite : l'apparence de l'anneau de Saturne est donc celle d'une ellipse dont les éléments sont faciles à calculer par les formules précédentes.

Toutefois, il faut ajouter que l'anneau de Saturne recevant sa lumière du Soleil, n'est pas toujours visible, car une seule de ses faces est éclairée. Pour qu'il soit visible, il faut et il suffit évidemment que la hauteur de la Terre et celle du Soleil au-dessus du plan de l'anneau soient de même signe. Or f et j sont les coordonnées angulaires de la direction TS par rapport aux axes Sx'', Sy'', Sz'', dont les deux premiers déterminent le plan de l'anneau; donc $-j$ est la hauteur de la Terre au-dessus du plan de l'anneau. On peut calculer de la même façon la hauteur du Soleil en remplaçant la Terre par le Soleil, et par suite, on sera toujours à même de déterminer si l'anneau est visible ou non.

Mais nous n'insisterons pas davantage sur ces questions, qui exigeraient de longs détails pour être traitées complètement.

Taches du Soleil. — La théorie précédente permet encore d'étudier avec la plus grande facilité le mouvement apparent d'un point de la surface d'un astre, par exemple des taches du Soleil, en faisant abstraction de leur mouvement propre, dont l'étude n'a pas sa place ici.

Le Soleil tourne sur lui-même dans le sens direct d'un mouvement uniforme autour d'un axe de direction fixe; la durée de sa rotation est de $25^j,38$; l'équateur solaire est incliné de $7°15'$ sur le plan de l'écliptique, et la longitude du nœud ascendant est $74°43'$ pour l'équinoxe 1925.0, d'après Carrington.

Une tache sera définie par sa longitude ψ'' et sa latitude θ'' par rapport à l'équateur solaire, la longitude étant comptée à partir du nœud ascendant sur l'écliptique; par suite ψ'' variera proportionnellement au temps, augmentant de 2π en $25^j,38$, tandis que θ'' restera fixe.

Prenons pour plan fondamental l'écliptique, et appelons i et ϖ l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'équateur solaire, précédemment indiquées : λ sera la longitude du Soleil, tandis que sa latitude est nulle. Par suite, les formules (1) donnent, en remplaçant θ_1 et ψ_1 par j et f,

$$\left\{\begin{array}{ll} \cos j \sin f = \cos i \sin(\lambda - \varpi), & \cos j \sin S = \sin i \cos(\lambda - \varpi), \\ \cos j \cos f = \cos(\lambda - \varpi), & \cos j \cos S = \cos i, \\ & \sin j = -\sin i \sin(\lambda - \varpi). \end{array}\right.$$

Quant aux formules (2), elles donnent, en faisant $k = 1$ et $\frac{r''}{r} = h$ (cette quantité est sensiblement constante, et égale au demi-diamètre apparent du Soleil) :

$$\left\{\begin{array}{l} s \cos(\chi + S) = h \cos\theta'' \sin(\psi'' - f), \\ s \cos(\chi + S) = h\left[\cos j \sin\theta'' - \sin j \cos\theta'' \cos(\psi'' - f)\right]. \end{array}\right.$$

L'angle i est petit; en négligeant son carré, on a

$$S = i\cos(\lambda - \varpi), \qquad j = -i\sin(\lambda - \varpi), \qquad f = \lambda - \varpi,$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{l} s \sin(\chi + S) = h \cos\theta'' \sin(\psi'' - \lambda + \varpi), \\ s \cos(\chi + S) = h \sin\theta'' + hi \cos\theta'' \sin(\lambda - \varpi)\cos(\psi'' - \lambda + \varpi), \end{array}\right.$$

avec une approximation déjà grande.

La longitude du Soleil est égale au commencement de Juin à la valeur de ♋. Par suite, on voit par les formules précédentes : 1° que l'angle S est petit et varie de i à $-i$ de Juin à Décembre, de $-i$ à i de Décembre à Juin ; 2° que pour $\psi'' = \lambda - \text{♋} + \frac{\pi}{2}$ ou $\psi'' = \lambda - \text{♋} + \frac{3\pi}{2}$, on a $s = h$, et $\chi + S = \frac{\pi}{2} - \theta''$ ou $\chi + S = -\frac{\pi}{2} + \theta''$; 3° que pour $\psi'' = \lambda - \text{♋} + \pi$, on peut prendre $\chi = -S$ et

$$s = h \sin \theta'' - hi \cos \theta'' \sin (\lambda - \text{♋}),$$

en n'assujettissant pas s à être positif, ainsi qu'il est légitime.

Si maintenant on observe que les taches paraissent au bord oriental pour disparaître au bord occidental, il en résulte que, pendant le temps d'apparition d'une tache, ψ'' varie de $\lambda - \text{♋} + \frac{\pi}{2}$ à $\lambda - \text{♋} + \frac{3\pi}{2}$. Si l'on négligeait i, la trajectoire apparente de la tache serait une corde perpendiculaire à la direction définie par l'angle S ; mais si l'on tient compte de i, on voit que cette trajectoire est légèrement incurvée vers le Sud de Juin à Décembre, et vers le Nord de Décembre à Juin : en effet, pour $\psi'' = \lambda - \text{♋} + \pi$, la valeur de s est plus petite dans le premier cas, plus grande dans le second, que la valeur $h \sin \theta''$ qui correspond à l'hypothèse $i = 0$.

Enfin, on voit que la période du mouvement apparent des taches est celle de l'argument $\psi'' - \lambda + \text{♋}$, c'est-à-dire $27^{j},3$ environ.

Remarquons en terminant que la même méthode s'appliquerait à l'étude du mouvement apparent des points de la surface de la Lune : sans qu'il soit nécessaire de développer les formules, on voit bien qu'à cause des conditions spéciales du mouvement de la Lune sur elle-même, un point fixe de la surface lunaire paraîtra s'écarter d'une position moyenne d'une quantité fort petite, correspondant à la libration déjà étudiée.

LIVRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉCLIPSES

CHAPITRE XVI

ÉCLIPSES DE LUNE

Classification des éclipses. — Un astre quelconque est *éclipsé*, partiellement ou totalement, pour un observateur déterminé, lorsqu'il cesse d'être visible, partiellement ou totalement, pour cet observateur, alors qu'il devrait l'être dans les conditions normales.

Ce phénomène peut se produire de deux façons absolument distinctes : 1° l'astre n'étant pas lumineux par lui-même, cesse d'être visible parce qu'il cesse d'être éclairé ; 2° l'astre cesse d'éclairer, parce qu'entre lui et l'observateur s'interpose un corps, qui peut d'ailleurs être obscur ou brillant. Les éclipses de la première catégorie sont indépendantes de la position de l'observateur, et sont visibles de tous les points pour lesquels l'astre est au-dessus de l'horizon ; tout au contraire, les circonstances d'une éclipse de la seconde catégorie peuvent subir de profondes modifications suivant la position de l'observateur à la surface de la Terre.

Dans la première catégorie, il faut distinguer spécialement les éclipses de Lune et les éclipses des satellites de Jupiter : dans un cas comme dans l'autre, la Lune ou le satellite cesse d'être éclairé en pénétrant dans l'ombre projetée par la Terre ou Jupiter.

Dans la seconde catégorie rentrent les éclipses de Soleil ; les passages d'une planète inférieure, Mercure ou Vénus, sur le disque du Soleil ; les occultations d'étoiles (ou de planètes) par la Lune ou par les planètes.

On peut encore rattacher à cette catégorie les phénomènes intéressants qui se produisent dans le système de Jupiter (ou d'une autre planète) : occultation d'un satellite par la planète, passage d'un satellite sur le disque de la planète.

Dans ce qui suit, nous n'étudierons que les éclipses de Lune et de Soleil (indépendamment des phénomènes physiques qui les accompagnent), les occultations d'étoiles par la Lune, et les passages de Mercure et de Vénus sur le disque du Soleil : ce sont les phénomènes les plus intéressants, en dehors de de ceux du système de Jupiter, dont on ne peut guère parler sans faire appel à la Mécanique céleste.

Éclipses de Lune. — Dans cette théorie, nous regarderons le Soleil, la Terre et la Lune comme sphériques ; s et s' seront les demi-diamètres apparents géocentriques à un instant donné de la Lune et du Soleil ; ϖ et ϖ' seront leurs parallaxes horizontales, non pas équatoriales, mais relatives à la latitude de 45°, de façon qu'elles correspondent à une valeur moyenne du rayon de la Terre. Pour obtenir ϖ et ϖ', il suffit d'ailleurs de multiplier les parallaxes horizontales équatoriales ϖ_0 et ϖ_0' par le rayon de la Terre à la latitude de 45° (le rayon équatorial a étant pris pour unité) ; le logarithme de ce facteur est $\bar{1},99927$, d'après le Chapitre IV : son influence sur ϖ' est négligeable, et il suffit de diminuer ϖ_0 du 600me de sa valeur pour obtenir ϖ. Remarquons de plus que l'on doit avoir soin de prendre pour s et s' les demi-diamètres apparents corrigés de l'irradiation, ainsi que nous l'avons indiqué au Chapitre précédent.

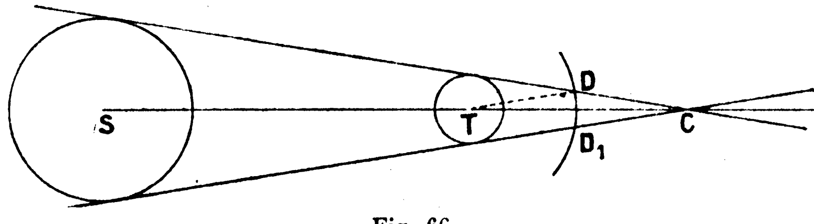


Fig. 66

Ceci posé, considérons la Terre T éclairée par le Soleil S, et appelons d la distance des centres, ρ et ρ' les rayons linéaires de la Terre et du Soleil (*fig.* 66). L'ombre projetée

par la Terre est limitée par un cône de révolution, de sommet C, circonscrit extérieurement à la Terre et au Soleil, et tout point situé dans la partie de ce cône comprise entre la Terre et le sommet C ne reçoit aucun rayon du Soleil. C'est précisément dans cette région que peut pénétrer la Lune, et non au delà du sommet C; on a en effet

$$\mathrm{TC} = \frac{\rho\, d}{\rho' - \rho} = \frac{\rho}{\sin s' - \sin \varpi'},$$

et cette valeur dépasse de beaucoup la distance maxima de la Terre à la Lune.

Décrivons alors de T comme centre une sphère ayant pour rayon la distance r de la Terre à la Lune, et cherchons le demi-diamètre apparent géocentrique, S, de la portion DD_1 de cette sphère contenue dans le cône d'ombre, c'est-à-dire l'angle CTD. Si f est le demi-angle au sommet du cône d'ombre, on a immédiatement

$$\mathrm{S} = \varpi - f,$$

car l'angle extérieur D du triangle CDT est égal à ϖ.

D'autre part, la construction connue de la tangente commune extérieure à deux cercles donne

$$\sin f = \frac{\rho' - \rho}{d} = \sin s' - \sin \varpi';$$

on peut écrire alors avec une approximation très suffisante

$$f = s' - \varpi',$$

et par suite

$$\mathrm{S} = \varpi + \varpi' - s'.$$

On peut envisager de même la pénombre projetée par la Terre,

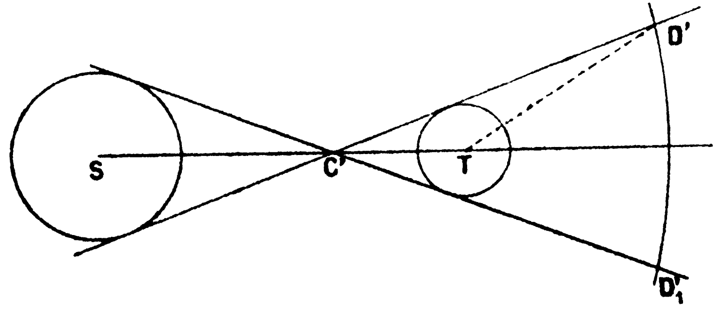


Fig. 67

et limitée par le cône de sommet C' circonscrit intérieurement à la Terre et au Soleil (*fig.* 67); tout point placé dans la partie

de ce cône située derrière la Terre, et non dans le cône C, ne sera éclairé que partiellement par le Soleil.

Le demi-diamètre apparent géocentrique S′ de la portion $D'D_1'$ de la sphère considérée de rayon r contenue dans le cône de pénombre, est égal ici à $\varpi + \varpi' + s'$.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas tenu compte de l'influence de la réfraction des rayons solaires à travers l'atmosphère qui entoure la Terre : il est facile de voir que cette influence a pour effet de raccourcir considérablement le cône d'ombre, de sorte qu'en réalité, un point de la Lune qui est géométriquement éclipsé continue à être partiellement éclairé par le Soleil : il voit par réfraction à travers l'atmosphère terrestre une partie du Soleil. Il s'ensuit que la Lune est encore visible quand elle est éclipsée ; mais les rayons qui l'éclairent sont éteints en grande partie par la transparence incomplète des couches plus ou moins humides de l'air, qui absorbent surtout la nuance complémentaire du rouge ; aussi la Lune apparaît-elle faiblement colorée en rouge dans les éclipses totales.

D'autre part, les basses couches de l'atmosphère éteignent complètement les rayons qui les traversent ; il en résulte que, pour mettre d'accord les observations avec la théorie, il faut augmenter légèrement les demi-diamètres apparents S et S′ : c'est ce qu'on fait en multipliant ces quantités par le facteur $1 + \frac{1}{50}$; les valeurs de S et de S′ qui nous serviront seront supposées ainsi corrigées.

Enfin, il résulte de ces remarques qu'on ne peut observer les circonstances d'une éclipse de Lune avec une extrême précision, et qu'il est par suite illusoire de chercher une grande exactitude dans la prédiction de ces circonstances.

Si l'on considère la sphère céleste de centre T, l'étude des circontances d'une éclipse de Lune revient simplement à l'étude de la position relative du disque apparent de la Lune L, et du disque invisible, mais dont nous avons déterminé les dimensions apparentes,

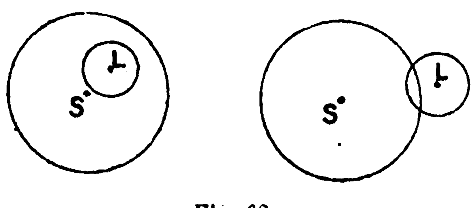


Fig. 68

déterminé dans le cône d'ombre ou de pénombre par la sphère de centre T et de rayon r (*fig.* 68).

Si l'on appelle σ la distance angulaire du point L, centre du disque lunaire, et du point S, centre du disque d'ombre ou de pénombre, diamétralement opposé au Soleil, le commencement ou la fin de l'éclipse par la pénombre aura lieu sous la condition

$$\sigma = S' + s;$$

la Lune entrera dans le cône d'ombre ou bien en sortira si l'on a

$$\sigma = S + s;$$

enfin l'éclipse totale commencera ou finira sous la condition

$$\sigma = S - s.$$

Calcul des phases d'une éclipse de Lune. — Considérons le triangle sphérique PLS, en désignant par P le pôle des coordonnées équatoriales (*fig.* 69). Soient à un instant donné α, δ

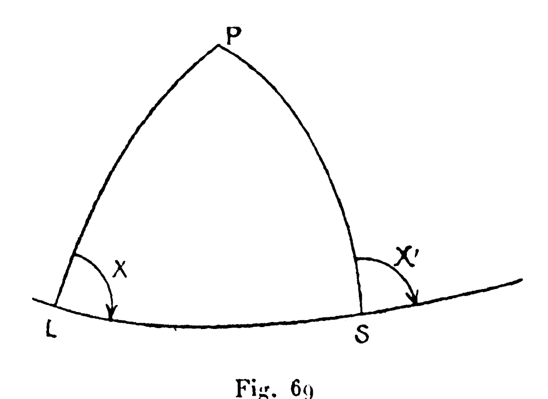


Fig. 69

l'ascension droite et la déclinaison apparentes géocentriques du centre de la Lune, L; α', δ' les mêmes coordonnées relatives au point S, de sorte que l'ascension droite et la déclinaison du Soleil sont $\pi + \alpha'$, $-\delta'$. L'arc LS est la distance σ, et l'angle PLS est l'angle de position χ de S par rapport à L, compté comme toujours dans le sens rétrograde, soit du Nord vers l'Est; χ' sera de même l'angle de SP avec le prolongement de LS.

En faisant

$$Q = \frac{\chi + \chi'}{2},$$

on a, d'après les formules (34) du chapitre III,

$$\left\{\begin{aligned} \sin\frac{\sigma}{2}\sin Q &= \cos\frac{\delta' + \delta}{2}\sin\frac{\alpha' - \alpha}{2}, \\ \sin\frac{\sigma}{2}\cos Q &= \sin\frac{\delta' - \delta}{2}\cos\frac{\alpha' - \alpha}{2}. \end{aligned}\right.$$

Pendant la durée de l'éclipse, la distance σ reste petite, et par suite il en est de même des différences $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$. On peut alors écrire avec une exactitude toujours suffisante

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \sigma \sin Q = (\alpha' - \alpha)\cos\frac{\delta + \delta'}{2}, \\ y &= \sigma \cos Q = (\delta' - \delta)\cos\frac{\alpha' - \alpha}{2}. \end{aligned}\right.$$

Puisque la différence $\alpha' - \alpha$ est petite, l'éclipse ne peut arriver que dans les environs d'une opposition. Prenons alors pour origine du temps un instant voisin de cette opposition, de préférence une heure ronde, et adoptons l'heure pour unité de temps. Les quantités x, y que l'on exprime comme σ en secondes d'arc, peuvent se développer suivant les puissances du temps, sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + x_0't + \frac{1}{2}x_0''t^2, \\ y &= y_0 + y_0't + \frac{1}{2}y_0''t^2, \end{aligned}\right.$$

sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin lorsque t reste dans le domaine utile ; x_0, y_0 sont les valeurs de x, y pour $t = 0$, et les autres coefficients x_0', x_0'', y_0', y_0'' s'obtiennent sans peine comme il suit : les valeurs de x, y pour les deux époques $-t'$ et $+t'$ (t' sera pris avantageusement égal à 3 heures) étant calculées directement et désignées par x_1, y_1 et x_2, y_2, on a par exemple

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x_0 - x_0't' + \frac{1}{2}x_0''t'^2, \\ x_2 &= x_0 + x_0't' + \frac{1}{2}x_0''t'^2, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$x_0' = \frac{x_2 - x_1}{2l'}, \quad \frac{1}{2} x_0'' = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2l'^2}.$$

Les équations qui définissent σ et Q en fonction du temps t sont donc

$$\begin{cases} \sigma \sin Q = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2} x_0'' t^2, \\ \sigma \cos Q = y_0 + y_0' t + \frac{1}{2} y_0'' t^2; \end{cases}$$

ou bien

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma \sin Q = m \sin M + t.n \sin N + t^2 \varepsilon \sin F, \\ \sigma \cos Q = m \cos M + t.n \cos N + t^2 \varepsilon \cos F, \end{cases}$$

en faisant

$$\begin{cases} x_0 = m \sin M, & x_0' = n \sin N, & \frac{1}{2} x_0'' = \varepsilon \sin F, \\ y_0 = m \cos M, & y_0' = n \cos N, & \frac{1}{2} y_0'' = \varepsilon \cos F. \end{cases}$$

On peut écrire encore

$$(3) \qquad \begin{cases} \sigma \sin (Q - N) = \mu + \beta t^2, \\ t = t_0 + \frac{\sigma}{n} \cos (Q - N) + \gamma t^2, \end{cases}$$

en posant

$$\begin{cases} \mu = m \sin (M - N), & \beta = \varepsilon \sin (F - N), \\ t_0 = -\frac{m}{n} \cos (M - N), & \gamma = -\frac{\varepsilon}{n} \cos (F - N). \end{cases}$$

Comme ε est une quantité très petite, souvent négligeable lorsqu'on ne recherche pas une grande approximation illusoire en réalité, rien n'est plus simple que de résoudre les équations précédentes par approximations successives, lorsqu'on se donne σ et que l'on recherche t, en même temps que l'inconnue auxiliaire Q.

En négligeant ε, on voit que sous la condition

$$\sigma \geqslant |\mu|,$$

le problème a deux solutions, et les deux valeurs de t sont symétriques par rapport à t_0.

Les quantités S′, S, s restent sensiblement constantes pendant la durée de l'éclipse : on les calculera pour l'origine du temps, et en même temps, on déterminera leurs variations horaires, de façon à pouvoir les obtenir exactement à un moment quelconque.

Si alors on veut déterminer par exemple les circonstances de l'entrée de la Lune dans le cône d'ombre, on procèdera de la façon suivante : prenant pour σ la valeur de $S + s$ pour $t = 0$, et négligeant ε, on obtient d'abord, si le problème est possible, et en prenant $\cos(Q - N) < 0$ (si l'on a choisi $n > 0$), une valeur approchée de t; avec cette valeur on peut déterminer exactement $S + s$ pour la phase envisagée, et recommencer le calcul avec cette valeur corrigée de σ, en même temps qu'on tiendra compte des termes en t^2 d'abord négligés.

Si la distance σ n'est pas extrêmement petite, l'angle Q peut être confondu avec l'angle de position χ du point S par rapport au centre de la Lune ; par suite, au moment du commencement ou de la fin de l'éclipse partielle, c'est-à-dire lorsque la Lune et le disque d'ombre sont tangents extérieurement, l'angle Q est l'angle de position du point de contact par rapport au centre de la Lune : il est utile de le calculer à l'avance, afin de faciliter l'observation.

Il est encore important de déterminer le minimum de la distance σ et l'époque de ce minimum. En différentiant les équations (2) par rapport à t, supposant $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, et éliminant $\frac{dQ}{dt}$, on a l'équation supplémentaire

$$n \cos(Q - N) + 2t\varepsilon \cos(Q - F) = 0, \tag{4}$$

qui, jointe aux équations (3), permet de résoudre la question.

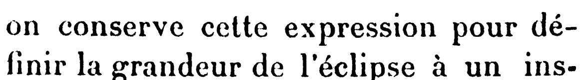
Si l'on néglige d'abord ε, on a

$$\sigma = \pm \mu, \quad Q = N \pm \frac{\pi}{2}, \quad t = t_0,$$

suivant que μ est positif ou négatif; tenant ensuite compte de ε, mais négligeant ε^2, on aura sans peine

$$\sigma = | \mu + \beta t_0^2 | , \quad t = t_0 - 2\frac{\mu\beta t_0}{n^2} + \gamma t_0^2.$$

A un instant donné, la distance LS étant σ, et l'éclipse étant partielle, la *grandeur* de l'éclipse est le rapport de la partie éclipsée AB du diamètre de la Lune dirigé suivant LS au diamètre total de la Lune (*fig.* 70) ; c'est donc



$$g = \frac{S + s - \sigma}{2s};$$

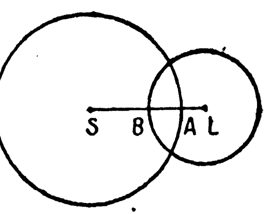


Fig. 70

on conserve cette expression pour définir la grandeur de l'éclipse à un instant quelconque. La grandeur proprement dite de l'éclipse est la valeur maxima de g : négligeant les variations de S et s, elle correspond au minimum de σ.

Les lieux terrestres qui voient à un instant donné une éclipse de Lune sont ceux pour lesquels cet astre est au-dessus de l'horizon : on les déterminera donc bien facilement.

Condition d'existence des éclipses de Lune. — Supposons que dans les mêmes conditions que ci dessus, on fasse usage des coordonnées écliptiques : λ, β seront la longitude et la latitude de la Lune, λ' sera la longitude du Soleil, et l'on aura avec une exactitude suffisante ici

$$x = \pi + \lambda' - \lambda, \quad y = -\beta;$$

si d'ailleurs i et Ω sont l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, on peut prendre avec la même approximation

$$\beta = i \sin(\lambda - \Omega).$$

On a aussi pour les dérivées de x et y par rapport au temps :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = -i\cos(\lambda - \Omega)\frac{d\lambda}{dt}.$$

Prenons pour origine du temps le moment même de l'opposition en longitude, et soient λ_0, λ'_0 les valeurs de λ, λ' à cet instant.

On a

$$x_0 = 0, \qquad x_0' = -\left[\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}\right]_0,$$

$$y_0 = -i\sin(\lambda_0 - \Omega), \qquad y_0' = -i\cos(\lambda_0 - \Omega)\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_0;$$

par suite, avec les notations ci-dessus,

$$\mathrm{M} = 0, \quad m = -i\sin(\lambda_0 - \Omega), \operatorname{cotg}\mathrm{N} = i\cos(\lambda_0 - \Omega)\left[\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}\right]_0.$$

On voit que l'angle N est voisin de $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, et par suite le minimum de σ, qui est ici $|m\sin\mathrm{N}|$, est à très peu près égal à la valeur absolue de $i\sin(\lambda_0 - \Omega)$, ou, si l'on préfère, de $i\sin(\lambda'_0 - \Omega)$.

Or la Lune ne pénètrera dans le cône d'ombre portée par la Terre que si ce minimum est inférieur à la quantité $\mathrm{S} + s$, soit 1° environ ; et puisque l'inclinaison i est de 5°9′ en moyenne, on voit que la condition d'existence de l'éclipse est que la distance du Soleil à l'un des nœuds de l'orbite lunaire soit inférieure à 11° environ, au moment de l'opposition.

On raisonnerait de la même façon pour une éclipse totale ou bien pour une éclipse par la pénombre.

Mais ces résultats ne sont qu'approchés, et il faut en retenir seulement qu'une éclipse de Lune partielle ou totale ne peut avoir lieu que dans les oppositions telles que la distance du Soleil à l'un des nœuds de l'orbite de la Lune ne dépasse pas une limite voisine de 11°.

Application à l'éclipse de Lune du 8 Février 1925. — Au cours de l'année 1925, le Soleil passe par le nœud descendant de l'orbite lunaire vers le 3 Février, et par le nœud ascendant vers le 28 Juillet : il y aura par suite éclipse de Lune aux deux oppositions suffisamment voisines de ces dates, du 8 Février et du 4 Août.

Appliquons les règles précédentes au calcul de l'éclipse du 8 Février.

Prenons pour origine du temps le 8 Février 22ʰ, (temps civil de Greenwich ou temps universel) ; et gardons toutes les notations employées ci-dessus.

Les éphémérides donnent

$$\text{pour } t = -t'(19^h)\ \begin{cases} \alpha = 9^h23^m\ 9^s,24 & \delta = +\ 15^\circ46'\ 0'',1 \\ \alpha' = 9^h27^m48^s,03 & \delta' = \ 14^\circ57'59'',1 \end{cases}$$

$$\text{pour } t = 0\ (22^h)\ \begin{cases} \alpha = 9^h29^m21^s,61 & \delta = \ 15^\circ25'28'',8 \\ \alpha' = 9^h28^m17^s,86 & \delta' = \ 14^\circ55'36'',3 \end{cases}$$

$$\text{pour } t = +\ t'(25^h)\ \begin{cases} \alpha = 9^h35^m33^s,36 & \delta = \ 15^\circ\ 4'16'',7 \\ \alpha' = 9^h28^m47^s,68 & \delta' = \ 14^\circ53'13'',3. \end{cases}$$

On a en même temps, pour $t = 0$,

$$\varpi_0 = 54'56'',24, \qquad s = 14'57'',44,$$
$$\varpi_0' = \quad 8'',92, \qquad s' = 16'12'',61,$$

et les variations horaires de ϖ_0, s sont respectivement $+\ 0'',93$, $+\ 0'',25$.

On a par suite

$$S' + s = 5\,255'',2 + 1'',2\,t, \qquad S + s = 3\,271'',0 + 1'',2\,t$$
$$2s = 1\,794'',9 + 0'',5\,t.$$

On obtient

$$x_1 = \quad 4\,032'',4 \qquad y_1 = -\ 2\,880'',9$$
$$x_0 = -\quad 922'',9 \qquad y_0 = -\ 1\,792'',5$$
$$x_2 = -\ 5\,878'',4 \qquad y_2 = -\quad 663'',3,$$

d'où

$$x_0' = -\ 1\,651'',8, \qquad \frac{1}{2}\,x_0'' = 0'',0,$$

$$y_0' = +\ 369'',6, \qquad \frac{1}{2}\,y_0'' = +\ 2'',3\,;$$

$$\log m = 3,30452, \qquad \log\frac{1}{n} = \bar{4},77143, \qquad \log\varepsilon = 0,362,$$

$$M = 207^\circ,243, \qquad N = -\ 77^\circ,387, \qquad F = 0^\circ,$$
$$\log\mu = 3,29021\,n, \qquad t_0 = -\ 0,3008,$$
$$\log\beta = 0,351, \qquad \log\gamma = \bar{4},472\,n.$$

Le milieu de l'éclipse a lieu pour $t = -\ 0,3009$, soit $21^h41^m,9$; le minimum de σ est alors $1\,950'',6$, et la grandeur de l'éclipse est 0,736 (par excès). L'éclipse n'est que partielle.

Pour les contacts extérieurs de la Lune avec le disque de pénombre, on trouve d'abord les valeurs approchées

— 3,18 et + 2,58 de t ; recommençant le calcul en tenant compte de la variation de $S' + s$, et des termes en βt^2, γt^2, on a les valeurs exactes

— 3,1895	ou	$18^h 48^m,6$	pour l'entrée dans la pénombre,
+ 2,5855	ou	$24^h 35^m,1$	pour la sortie de la pénombre.

De même, pour l'entrée dans l'ombre et la sortie de l'ombre, on a d'abord les valeurs approchées — 1,85 et + 1,25 ; puis exactement

— 1,8547	ou	$20^h 8^m,7$	pour l'entrée dans l'ombre,
+ 1,2525	ou	$23^h 15^m,2$	pour la sortie de l'ombre.

L'angle de position Q est en outre égal à 139° pour l'entrée dans l'ombre, à 246° pour la sortie.

CHAPITRE XVII

ÉCLIPSES DE SOLEIL

Les éclipses de Soleil, les occultations d'étoiles par la Lune, les passages de Mercure et Vénus sur le Soleil, sont des phénomènes tous de même nature ; pour passer des éclipses de Soleil aux occultations, il suffit de remplacer le Soleil par une étoile ; pour transposer la théorie des éclipses de Soleil aux passages, il faut remplacer la Lune par la planète.

Ces phénomènes peuvent être observés avec une très grande précision ; leur théorie doit donc être faite d'une façon rigoureuse : elle est assez complexe, dans le cas des éclipses surtout, et encore dans celui des occultations, à cause de la grandeur de la parallaxe lunaire ; elle se simplifie notablement dans le cas des passages, et il y a avantage à traiter directement ce cas, sans le rattacher trop étroitement à la théorie générale.

Le présent Chapitre est consacré aux éclipses de Soleil : en même temps que la théorie, nous donnerons, comme application, le calcul des circonstances principales de l'éclipse du 24 janvier 1925.

Equations générales du problème. — Nous supposerons la Lune et le Soleil rigoureusement sphériques, de centres L et S, leurs rayons linéaires étant R et R′ ; l'unité de longueur sera d'ailleurs toujours le rayon équatorial terrestre.

A l'instant t, les demi-diamètres apparents et les parallaxes horizontales équatoriales de la Lune et du Soleil seront res-

pectivement s, s', ϖ, ϖ'; de sorte que si r et r' sont les distances géocentriques de la Lune et du Soleil, on a les relations

$$(1) \qquad r = \frac{1}{\sin \varpi} = \frac{R}{\sin s}, \qquad r' = \frac{1}{\sin \varpi'} = \frac{R'}{\sin s'}.$$

Toujours à l'instant t, l'ascension droite et la déclinaison géocentriques apparentes de la Lune et du Soleil seront α, δ, α', δ'; rien ne serait plus simple d'ailleurs que de substituer les coordonnées écliptiques aux coordonnées équatoriales.

Un lieu M de la Terre, où l'on suppose l'observateur, sera défini par ses coordonnées géographiques. La longitude L sera comptée à partir du méridien de Greenwich, positivement vers l'Ouest, comme toujours; au lieu de la latitude φ, ou même de la latitude géocentrique φ', il sera préférable d'employer l'angle auxiliaire ψ qui nous a déjà servi au Chapitre IV, ou latitude *excentrique*, tel que l'on ait

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \psi = (1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi,$$

α désignant l'aplatissement (sans confusion possible avec le sens déjà donné à cette lettre). Si alors h désigne l'altitude de M, on sait que les coordonnées de M, rapportées aux axes de la section méridienne correspondante, sont avec une exactitude plus que suffisante

$$(1 + h) \cos \psi, \qquad (1 + h)(1 - \alpha) \sin \psi.$$

Il faut observer maintenant que ce qui nous importe, ce sont les *apparences* que présentent l'un par rapport à l'autre le Soleil et la Lune, au point M; il faut donc tenir compte de la réfraction. D'après ce qui a été dit au Chapitre VII sur la réfraction dans le cas d'un astre à distance finie, on voit que ces apparences seront les mêmes que celles que l'on observerait en un certain point M', *en ne tenant pas compte de la réfraction*; ce point M' est sur la verticale de M, et a pour altitude $h + h_1$, la valeur de h_1 étant

$$\frac{n_0 \sin \zeta_0}{\sin \zeta_1} - 1,$$

en conservant les notations du passage rappelé.

Si par exemple, pour préciser, la Lune et le Soleil paraissent

en contact en M en vertu de la réfraction, ils paraissent aussi en contact en M′, abstraction faite de la réfraction ; et pour calculer h_1, on remarquera que n_0 est l'indice de l'air en M, que ζ_1 est la distance zénithale vraie du point de contact de la Lune et du Soleil, vu de M′, enfin que ζ_0 est la distance zénithale apparente de ce même point de contact vu de M, et par suite est égale à $\zeta_1 - R$, en désignant par R la réfraction astronomique relative à ζ_0.

En conséquence, et afin de pouvoir faire abstraction dans ce qui suit de la réfraction, on substitue M′ à M, ce qui revient à supposer h augmentée de h_1. Nous conserverons donc les expressions déjà données des coordonnées de M ; mais h se composera de deux parties : la véritable altitude de M (nulle pour un point de l'ellipsoïde terrestre), d'une part, et d'autre part l'altitude fictive h_1, en fait négligeable pratiquement, sauf dans le voisinage immédiat de l'horizon.

Pour pouvoir étudier plus facilement la position relative de la Lune et du Soleil vus du point M, il convient de choisir des axes de coordonnées particuliers, variables d'ailleurs avec l'époque t. L'origine de ces axes sera le centre O de la Tere ; l'axe Oz sera parallèle à la direction LS, qui joint les centres de la Lune et du Soleil ; si maintenant OP est la direction de l'axe du monde, l'axe Oy sera dans le plan OPz, du côté du Nord, c'est-à-dire faisant avec OP un angle aigu ; enfin l'axe Ox déterminera avec Oz et Oy un trièdre trirectangle de sens direct.

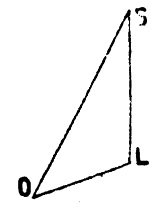


Fig. 71

Déterminons d'abord l'ascension droite a et la déclinaison d de la direction Oz ou LS ; en appelant q la distance LS, la projection du contour OLS donne (*fig* 71) :

$$\left\{\begin{aligned} q \cos a \cos d &= r' \cos \alpha' \cos \delta' - r \cos \alpha \cos \delta, \\ q \sin a \cos d &= r' \sin a' \cos \delta' - r \sin \alpha \cos \delta, \\ q \sin d &= r' \sin \delta' - r \sin \delta ; \end{aligned}\right.$$

ce sont les formules des problèmes de parallaxe : par suite, on peut écrire facilement les formules rigoureuses correspondantes, en faisant le changement de notations nécessaire. Mais le rapport $\frac{r}{r'}$ est petit $\left(\frac{1}{400} \text{ environ}\right)$; de plus, aux environs

d'une éclipse, les différences $\alpha - \alpha'$ et $\delta - \delta'$ sont nécessairement petites ; écrivons alors les équations précédentes sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} q\cos a\cos d &= (r'-r)\cos\alpha'\cos\delta' + r(\cos\alpha'\cos\delta' - \cos\alpha\cos\delta),\\ q\sin a\cos d &= (r'-r)\sin\alpha'\cos\delta' + r(\sin\alpha'\cos\delta' - \sin\alpha\cos\delta),\\ q\sin d &= (r'-r)\sin\delta' + r(\sin\delta' - \sin\delta), \end{aligned}\right.$$

de façon que les dernières parties des seconds membres soient par rapport aux premières de l'ordre des quantites $\frac{r}{r'}(\alpha - \alpha')$, $\frac{r}{r'}(\delta - \delta')$; on obtient immédiatement, par les formules (18) du Chapitre III, en négligeant les carrés et les produits de ces quantités,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} a - \alpha' &= -\frac{r}{r'-r}\cos\delta\,\text{séc}\,\delta'\sin(\alpha-\alpha'),\\ d - \delta' &= -\frac{r}{r'-r}\left[\sin(\delta-\delta') + 2\cos\delta\sin\delta'\sin^2\frac{\alpha-\alpha'}{2}\right],\\ q &= r' - r\cos(\delta-\delta') + 2r\cos\delta\cos\delta'\sin^2\frac{\alpha-\alpha'}{2}, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura plus simplement, avec une exactitude largement suffisante pour la suite,

$$q = r' - r.$$

Considérons maintenant les éléments qui définissent la position du système d'axes $Oxyz$ par rapport au système $O\gamma\gamma'P$, γ étant l'équinoxe, P le pôle, γ' le point à 90° de γ dans l'équateur (*fig.* 72). En les appelant i, σ, σ', comme au Chapitre IV, on a d'après la figure :

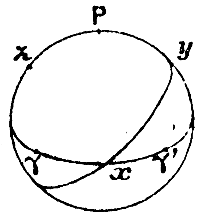


Fig. 72

$$i = \frac{\pi}{2} - d, \qquad \sigma = \frac{\pi}{2} + a, \qquad \sigma' = 0.$$

Si alors x, y, z sont les coordonnées de L par rapport aux axes $Oxyz$, on a par les formules (21) du Chapitre III :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= r\cos\delta\sin(\alpha - a),\\ y &= r[\cos d\sin\delta - \sin d\cos\delta\cos(\alpha - a)]\\ &= r\left[\sin(\delta - d) + 2\sin d\cos\delta\sin^2\frac{\alpha - a}{2}\right],\\ z &= r[\sin d\sin\delta + \cos d\cos\delta\cos(\alpha - a)]\\ &= r\left[\cos(\delta - d) - 2\cos d\cos\delta\sin^2\frac{\alpha - a}{2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées de S seront x, y, $z' = z + q$.

Enfin, cherchons les coordonnées ξ, η, ζ du lieu d'observation M, par rapport aux mêmes axes ; si θ est le temps sidéral sur le méridien origine, l'ascension droite de M est $\theta - L$; introduisons au lieu de θ l'angle horaire H de la direction Oz ou LS pour le méridien origine : on a $\theta = H + a$, et par suite l'ascension droite de M est $H + a - L$. Il vient donc immédiatement

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = (1 + h) \cos\psi \sin(H - L), \\ \eta = (1 + h)\,[(1 - \alpha) \cos d \sin\psi - \sin d \cos\psi \cos(H - L)], \\ \zeta = (1 + h)\,[(1 - \alpha) \sin d \sin\psi + \cos d \cos\psi \cos(H - L)], \end{cases}$$

car la déclinaison de la direction OM est la latitude géocentrique φ', et si ρ est la distance OM, on a

$$\rho \cos\varphi' = (1 + h) \cos\psi, \qquad \rho \sin\varphi' = (1 + h)(1 - \alpha) \sin\psi.$$

De même, φ étant la latitude vraie, on voit que les cosinus directeurs de la verticale vraie en M sont

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda = \cos\varphi \sin(H - L), \\ \mu = \cos d \sin\varphi - \sin d \cos\varphi \cos(H - L), \\ \nu = \sin d \sin\varphi + \cos d \cos\varphi \cos(H - L). \end{cases}$$

Envisageons actuellement les disques du Soleil et de la Lune, de centres S et L, tels qu'on les voit du point M projetés sur la sphère céleste. On doit distinguer quatre dispositions différentes :

a) la Lune et le Soleil sont extérieurs : il n'y a pas éclipse ;

b) la Lune et le Soleil sont sécants : il y a éclipse *partielle* ;

c) le Soleil est intérieur à la Lune : il y a éclipse *totale* ;

d) la Lune est intérieure au Soleil : il y a éclipse *annulaire*.

Désignons par σ et σ' les demi-diamètres apparents des deux astres, vus de M, et par ω la distance angulaire de leurs centres.

Soit C un des points du bord de la Lune situés sur la ligne des centres LS (*fig.* 73) ; décrivons de S comme centre un cercle passant par C, et soit $k\sigma'$ son demi diamètre apparent, que nous prendrons positif ou négatif suivant que ce cercle est tangent extérieurement ou intérieurement à la Lune. Le

en convenant, ce qui est permis, de prendre f positif ou négatif, suivant que le second membre est positif ou négatif.

L'équation cherchée est alors, comme on sait,

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\operatorname{tg}^2 f\left(z-\zeta+\frac{R\eta}{R+kR'}\right)^2.$$

En se servant de la valeur de $\sin f$, et posant

(8) $$u = z \operatorname{tg} f + R \operatorname{séc} f,$$

(9) $$l = u - \zeta \operatorname{tg} f,$$

on écrit la relation fondamentale précédente sous la forme

(10) $$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=l^2.$$

En éliminant f, u, l, entre les équations (7), (8), (9), (10), on obtient bien une équation du second degré en k.

Pour vérifier l'équation (10), on peut encore introduire une nouvelle variable Q, et poser

(11) $$x-\xi = l \sin Q, \quad y-\eta = l \cos Q.$$

Si C est le point de contact de la Lune et du Soleil fictif qui correspond à la racine k, la direction MC coïncide avec la direction MI, ou bien avec la direction opposée, suivant que la cote du point I est supérieure ou inférieure à celle de M, c'est-à-dire suivant que $\frac{l}{\operatorname{tg} f}$ est positif ou négatif; d'ailleurs les cosinus directeurs de MI sont évidemment $\pm \sin f \sin Q$, $\pm \sin f \cos Q$, $\pm \cos f$, suivant que $\frac{l}{\sin f}$ est positif ou négatif; donc, $\cos f$ étant toujours positif, les cosinus directeurs de la direction MC sont toujours

$$\sin f \sin Q, \quad \sin f \cos Q, \quad \cos f.$$

Si ζ_1 désigne alors la distance zénithale vraie de la direction MC, distance qui nous est nécessaire pour tenir compte de la réfraction dans l'observation de cette direction, et aussi pour savoir si cette direction est au-dessus ou au-dessous de l'horizon, on a

(12) $$\cos \zeta_1 = (\lambda \sin Q + \mu \cos Q) \sin f + \nu \cos f.$$

La signification de l'angle Q est facile à trouver; l'angle de

position du point C par rapport au point z, et relatif au pôle P, compté dans le sens rétrograde (celui des coordonnées horaires) de zP vers zC (*fig.* 75), est évidemment égal à Q ou à $\pi + Q$, suivant que f est positif ou négatif, d'après les valeurs des cosinus directeurs de MC. Si l'on remarque alors que le point S est toujours extrêmement voisin de z, on peut dire avec une approximation suffisante que, si k n'est pas très voisin de zéro, l'angle de position du point C par rapport au centre du Soleil, compté dans le sens des coordonnées horaires, a pour valeur Q ou $\pi + Q$ suivant que f est positif ou négatif. La connaissance de cet angle est importante, surtout pour la pratique de l'observation des contacts extérieurs.

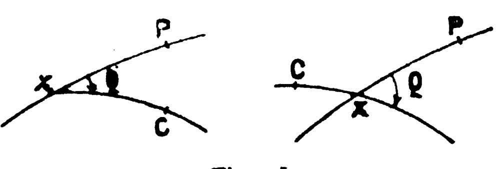


Fig. 75

Rendons-nous compte de la grandeur des quantités f, u, l. La distance q étant très voisine de r', on a sensiblement

$$\sin f = \frac{\varpi'}{\varpi} s + ks';$$

donc, k ne dépassant guère 1 en valeur absolue d'une façon utile, puisque s et s' sont toujours voisins, f est assez petit pour qu'on puisse faire $\sin f = \operatorname{tg} f = f$, $\cos f = 1$.

Affectons alors de l'indice 1 ou 2 les quantités f, u, l, suivant qu'elles se rapportent à l'hypothèse $k = 1$ ou $k = -1$, c'est-à-dire encore $g = 0$ ou $g = 1$; f, u, l seront des fonctions linéaires de g, et l'on pourra écrire

$$f = f_1 - g(f_1 - f_2), \qquad u = u_1 - g(u_1 - u_2), \qquad l = l_1 - g(l_1 - l_2).$$

On a sensiblement

$$f_1 = s' + s\frac{\varpi'}{\varpi}, \qquad f_2 = -s' + s\frac{\varpi'}{\varpi},$$

de sorte que f_1 et $-f_2$ sont très voisins de s'.

D'autre part, z est très voisin de r ou $\frac{R}{s}$, et par suite

$$u_1 = R\left(1 + \frac{s'}{s} + \frac{\varpi'}{\varpi}\right), \qquad u_2 = R\left(1 - \frac{s'}{s} + \frac{\varpi'}{\varpi}\right),$$

à très peu près.

La somme $u_1 + u_2$ est très sensiblement constante pour toutes les éclipses, égale à la valeur moyenne de $2R\left(1 + \frac{\varpi'}{\varpi}\right)$. D'une façon moins approchée, mais suffisante pour se rendre compte des faits, on peut dire que u_1 est voisin de $2R$, u_2 voisin de zéro.

On peut répéter les mêmes choses pour l_1 et l_2, puisque

$$l_1 = u_1 - \zeta f_1, \qquad l_2 = u_2 - \zeta f_2,$$

et que ζ ne dépasse pas l'unité.

Pour déterminer à un instant donné et dans un lieu donné, les circonstances d'une éclipse de Soleil, c'est-à-dire la position relative du Soleil et de la Lune, on a les deux équations

$$x - \xi = l \sin Q, \qquad y - \eta = l \cos Q,$$

où les deux inconnues sont g et Q. Ces équations admettent deux solutions qui correspondent aux deux points C et C′ envisagés précédemment, situés sur le bord de la Lune et sur la ligne des centres LS. Si L est la valeur *positive* du radical $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, les deux valeurs de l'inconnue g sont

$$(13) \qquad g_0 = \frac{l_1 - L}{l_1 - l_2}, \qquad g_0' = \frac{l_1 + L}{l_1 - l_2},$$

et comme nous l'avons dit plus haut, g_0 est la grandeur de l'éclipse pour l'instant et le lieu considérés ; en d'autres termes, g_0 caractérise et mesure la *phase* de l'éclipse.

En reprenant ce que nous avons déjà dit, on voit que les conditions des différents cas possibles sont les suivantes :

a) Pas d'éclipse $\quad L > l_1$,
b) Eclipse partielle $\quad |l_2| < L < l_1$,
c) Eclipse totale $\quad l_2 > 0, \quad L < l_2$,
d) Eclipse annulaire $\quad l_2 < 0, \quad L < -l_2$.

On peut ajouter que l'on a $L = 0$, et par suite

$$x - \xi = 0, \qquad y - \eta = 0,$$

dans le cas d'une éclipse centrale.

Si l'on a $L = l_1$, et par suite $g_0 = 0$, le Soleil et la Lune sont tangents extérieurement : l'éclipse (partielle) commence ou finit.

Si l'on a $L = l_2$ (ce qui suppose $l_2 > 0$), et par suite $g_0 = 1$, le Soleil et la Lune sont tangents intérieurement : l'éclipse totale commence ou finit.

Si l'on a $L = -l_2$ (ce qui suppose $l_2 < 0$), et par suite $g_0' = 1$, le Soleil et la Lune sont encore tangents intérieurement : l'éclipse annulaire commence ou finit ; sa grandeur g_0 est inférieure à 1.

Comme on a très sensiblement

$$l_1 + l_2 = 2R\left(1 + \frac{\varpi'}{\varpi}\right) = 2R_1,$$

on peut, si l'on n'a pas besoin d'une grande précision dans le calcul de g_0, y remplacer l_2 par $2R_1 - l_1$, d'où encore

$$(13^{bis}) \qquad g_0 = \frac{l_1 - L}{2(l_1 - R_1)}.$$

La grandeur proprement dite de l'éclipse au point M est le maximum de g_0, quand le temps varie ; elle correspond à la plus grande phase.

La grandeur de l'éclipse générale est le maximum de g_0, quand on fait varier à la fois le temps et le lieu.

On exprime encore quelquefois, suivant une ancienne habitude, la grandeur g en *doigts*, c'est-à dire en douzièmes ; la phase est de cinq doigts par exemple, si

$$g = \frac{5}{12}.$$

Les différentes formules que nous venons d'établir renferment toute la théorie des éclipses de Soleil. Pour les utiliser, on calculera d'abord pour un certain nombre d'époques équidistantes, également réparties avant et après le moment de la conjonction de la Lune et du Soleil (car il ne peut y avoir éclipse qu'aux environs de ce moment), les valeurs de x, y, H, d, f_1, f_2, u_1, u_2. On pourra alors, par simple interpolation, avoir les valeurs de ces mêmes quantités, et aussi de leurs dérivées par rapport au temps, pour une époque quelconque ; on remarquera d'ailleurs que ces quantités varient très sensiblement en raison directe du temps, que d varie beaucoup moins vite que x, y et H, et que f_1, f_2, u_1, u_2 sont presque constants.

Application à l'éclipse de Soleil du 24 Janvier 1925. — La nouvelle Lune se produit le 24 Janvier 1925 vers 15^h, temps moyen civil de Greenwich, ou temps universel : nous compterons le temps à partir de cette date, en prenant l'heure pour unité.

En appelant *b* la distance moyenne du Soleil à la Terre, ou unité astronomique de longueur, on a, d'après l'unité de longueur choisie pour l'étude actuelle, et les données indiquées antérieurement,

$\log b = 4{,}3699424$. $\log R' = 2{,}0376195$, $\log R = \bar{1}{,}4350060$.

L'éphéméride du Soleil donne, pour les heures voisines de la nouvelle Lune,

t	α'	δ'	$\log \frac{r'}{b}$
— 3	306°.20'.16'',951	— 19°.15'.29'',000	$\bar{1}$,9932080
— 2	22 .54 ,023	14 .53 ,008	100
— 1	25 .31 ,075	14 .16 ,979	121
0	28 . 8 ,107	13 .40 ,913	141
1	30 .45 ,119	13 . 4 ,810	162
2	33 .22 ,111	12 .28 ,670	182
3	35 .59 ,083	11 .52 ,493	203

Il est bien clair d'ailleurs que les millièmes de seconde d'arc ici écrits n'ont aucune réalité, et sont purement fictifs : leur objet est de donner aux valeurs de α' et δ' une marche régulière, les différences secondes de ces fonctions restant constantes.

De même, l'éphéméride de la Lune donne en tenant compte des corrections indiquées par les derniers progrès de la théorie, et en rendant constantes les différences troisièmes de l'ascension droite et de la déclinaison, ainsi que les différences secondes de la parallaxe,

t	α	δ	ϖ
— 3	304°.26'.16'',502	— 18°.37'. 1'',104	60'.58'',599
— 2	305 . 5 .38 ,907	31 .49 ,345	57 ,846
— 1	305 .44 .57 ,900	26 .29 ,600	57 ,061
0	306 .24 .13 ,406	21 . 1 ,931	56 ,244
1	307 . 3 .25 ,350	15 .26 ,400	55 ,395
2	307 .42 .33 ,657	9 .43 ,069	54 ,514
3	308 .21 .38 ,252	3 .52 ,000	53 ,601

En ajoutant que le temps sidéral pour $t = 0$, sur le méridien origine (celui de Greenwich), est égal à

$$348^\circ 24' 45'',75,$$

et que sa variation horaire est

$$15^\circ 2' 27'',85,$$

nous avons l'ensemble complet des données nécessaires au calcul de l'éclipse.

On trouve d'abord pour $a - \alpha'$, $d - \delta'$, les valeurs successives

16",815, 11",402, 5",990, 0",579, —4",831, —10",240, —15",648;
—5",566, —6",289, —7",014, —7",741, —8",470, —9",201, —9",934;

et l'on en déduit le premier tableau

t	H	d	log sin d	log cos d
— 3	356°.56′.48″,43	— 19°.15′.34″,566	$\bar{1}$,518315 n	$\bar{1}$,974987
— 2	11 .56 .44 ,62	14 .59 ,297	8102 n	5013
— 1	26 .56 .40 ,83	14 .23 ,993	7889 n	5039
0	41 .56 .37 ,06	13 .48 ,654	7676 n	5065
1	56 56 .33 ,31	13 .13 ,280	7463 n	5091
2	71 .56 .29 ,58	12 .37 ,871	7249 n	5117
3	86 .56 .25 ,87	12 . 2 ,427	7035 n	5143

Les dérivées H' et d' de H et d par rapport au temps sont constantes, ou quasi-constantes : en arc on a

$$H' = 14^\circ 59' 56'', \qquad d' = 35'',36,$$

et d'une façon absolue, ou en radians,

$$\log H' = \bar{1},41794, \qquad \log d' = \bar{4},234.$$

On a aussi le tableau suivant, où x' et y' sont les dérivées de x et y,

t	x	x'	y	y'
—3	— 1,775979	+ 0,571537	+ 0,622616	+ 0,080890
—2	— 1,204392	628	0,703600	81077
—1	— 0,632741	664	0,784768	81258
0	— 0,061081	647	0,866114	81433
1	+ 0,510535	576	0,947633	81603
2	+ 1,082054	452	1,029319	81768
3	+ 1,653421	273	1,111167	81927

Les valeurs de z ne servent que comme intermédiaires ; on trouve

$$\log z = 1{,}7508891$$
$$1089$$
$$1246$$
$$1361$$
$$1435$$
$$1467$$
$$1456,$$

et il en résulte le dernier tableau

t	u_1	u_2	$\log \operatorname{tg} f_1$	$\log \operatorname{tg} f_2$
— 3	0,539891	+ 0,005997	$\bar{3}$,676620	$\bar{3}$,674451 *n*
— 2	0,540013	5875	18	49 *n*
— 1	109	5779	16	47 *n*
0	179	5709	15	46 *n*
1	223	5665	13	44 *n*
2	241	5647	11	42 *n*
3	233	5655	09	40 *n*

Les dérivées f_1', f_2' sont entièrement négligeables ; les dérivées u_1', u_2' sont très petites : en unités de la sixième décimale, les valeurs successives de u_1' sont 135, 109, 83, 57, 31, 5, — 21 ; celles de u_2' sont les mêmes, changées de signe.

Les tableaux précédents, interpolés de 10 minutes en 10 minutes, et réduits au nombre de chiffres utile, sont ceux que l'on trouve dans la Connaissance des Temps.

Prédiction de l'éclipse en un lieu donné. — Supposons qu'il s'agisse de déterminer avec précision les circonstances d'une éclipse en un lieu donné.

On doit donc déterminer l'époque exacte pour laquelle g a une valeur donnée : s'il s'agit des contacts extérieurs par exemple, c'est-à-dire du commencement ou de la fin de l'éclipse partielle, on fait $g = 0$; s'il s'agit des contacts intérieurs, c'est-à-dire du commencement ou de la fin de l'éclipse totale ou annulaire, on fait $g = 1$.

Il faut d'abord, pour résoudre ce problème, savoir calculer

ξ, η, ζ et leurs dérivées pour une époque donnée. Le calcul de ξ, η, ζ se fait par les formules (5), où l'on connaît H et d d'après ce qui précède : il reste à connaître h. L'observation portant sur le point de contact C qui correspond à g, h est une fonction de ζ_1 toujours petite, facile à réduire en table, et il suffit de prendre pour ζ_1 une valeur approchée. En remarquant que f est très petit, et que ν est très voisin de ζ, on prendra donc $\cos \zeta_1 = \zeta$.

Si l'on marque toujours par un accent les dérivées par rapport au temps, ξ', η', ζ' sont faciles à calculer d'après (5). Ce seront des fonctions linéaires de h', H', d', et l'on voit sans peine que l'on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= \frac{h'}{1+h}\xi + \mathrm{H}'(-\eta \sin d + \zeta \cos d) \\ &= \frac{h'}{1+h}\xi + \mathrm{H}'(1+h)\cos\psi \cos(\mathrm{H}-\mathrm{L}), \\ \eta' &= \frac{h'}{1+h}\eta + \mathrm{H}'\xi \sin d - d'\zeta, \\ \zeta' &= \frac{h'}{1+h}\zeta - \mathrm{H}'\xi \cos d + d'\eta. \end{aligned}\right.$$

H' et d' sont connus d'après ce qui a été dit, et le plus souvent on peut négliger d' ; il reste donc à déterminer $\frac{h'}{1+h}$ ou $\frac{1}{1+h}\frac{dh}{d\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{dt}$. Le facteur $\frac{1}{1+h}\frac{dh}{d\zeta_1}$ est une fonction de ζ_1 facile à réduire en table, et qu'on calculera avec la valeur approchée de ζ_1 indiquée plus haut ; quant à $\frac{d\zeta_1}{dt}$, c'est d'une façon suffisamment approchée $-\frac{\zeta'}{\sin \zeta_1}$. Cette formule semble devenir illusoire si ζ_1 est voisin de o ; mais il ne faut pas oublier qu'il n'y a lieu de tenir compte de la réfraction que dans le voisinage immédiatement de l'horizon.

Enfin, il est facile maintenant de calculer l pour une époque quelconque, et sa dérivée l', toujours très petite.

Ceci posé, prenons pour origine du temps un instant voisin de la conjonction de la Lune et du Soleil ; pendant un certain temps avant et après cet instant, on peut considérer d'une façon approchée, x, y, ξ, η, l comme variant d'une façon

uniforme, et par suite les mettre sous la forme

$$x = x_0 + x_0't, \quad y = y_0 + y_0't, \ldots\ldots;$$

$x_0, y_0, \ldots\ldots$ sont les valeurs de $x, y, \ldots\ldots$ pour l'origine du temps; $x_0'\, y_0', \ldots\ldots$ sont les valeurs de $x', y', \ldots\ldots$ pour le même instant : toutes ces quantités sont donc faciles à calculer. Posons

$$\begin{cases} x_0 - \xi_0 = m \sin M, & x_0' - \xi_0' = n \sin N, \\ y_0 - \eta_0 = m \cos M, & y_0' - \eta_0' = n \cos N, \end{cases}$$

et négligeons l_0'. Les équations (11) deviennent

$$\begin{cases} m \sin M + n \sin N.t = l_0 \sin Q, \\ m \cos M + n \cos N.t = l_0 \cos Q, \end{cases}$$

et donnent par des combinaisons évidentes

$$\begin{cases} \sin(Q - N) = \dfrac{m \sin(M - N)}{l_0}, \\ t = -\dfrac{m}{n}\cos(M - N) + \dfrac{l_0 \cos(Q - N)}{n}. \end{cases}$$

On obtient ainsi deux valeurs de t, correspondant aux deux moments où g a la valeur donnée. Ce sont des valeurs approchées : en les prenant successivement comme origine du temps, on recommencera le calcul de la même façon ; mais cette fois, entre les deux valeurs de t que l'on obtiendra par chaque calcul, on ne conservera que celle qui correspond à l'époque dont on cherche à approcher, c'est-à-dire celle qui est voisine de zéro.

On fera encore de nouvelles approximations, s'il est nécessaire.

Il peut arriver que la valeur absolue de l_0 soit inférieure à celle de $m \sin(M - N)$, de sorte que les valeurs de t sont alors imaginaires : ceci ne veut pas nécessairement dire que le problème est impossible, puisqu'on n'a qu'une solution approchée ; dans ce cas, on recommencera le premier calcul en prenant pour origine du temps l'époque déterminée par

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N).$$

Supposons l'époque exacte qui correspond à une valeur de g déterminée, ainsi que l'angle Q correspondant ; la connais-

sance de cet angle fournira, comme nous l'avons vu, l'angle de position du point C par rapport au centre du Soleil ; quant à la grandeur de l'éclipse en ce moment, elle sera donnée par la formule (13) ou (13bis), où l'on prendra pour L la valeur absolue de l.

Enfin, pour que la direction MC soit visible, il faudra que la distance zénithale ζ_1, qui est facile à calculer avec précision si c'est nécessaire, soit inférieure à $\frac{\pi}{2} + R_0$, en désignant par R_0 la réfraction horizontale, puisqu'il faut que ζ_0 soit inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

Proposons-nous encore de déterminer l'instant de la plus grande phase et la grandeur de l'éclipse en M.

Reprenons à cet effet l'équation (10), qui définit g comme une fonction du temps, dont la dérivée sera g' : elle donne

$$(x - \xi)(x' - \xi') + (y - \eta)(y' - \eta') - ll' = 0.$$

Or, si l'on néglige les très petites variations de u_1, u_2, f_1, f_2, dont il serait bien facile de tenir compte, on a simplement

$$l' = -\zeta' \operatorname{tg} f - g'(l_1 - l_2);$$

par suite le produit lg' a toujours le signe contraire à celui de la quantité

$$G = (x - \xi)(x' - \xi') + (y - \eta)(y' - \eta') + l\zeta' \operatorname{tg} f,$$

et s'annule en même temps que cette quantité.

Si d'ailleurs g est la grandeur de l'éclipse à l'époque t, le nombre l correspondant est nécessairement positif, d'après ce qu'on a vu précédemment.

Pour répondre à la question posée, il faut donc résoudre les équations

$$G = 0, \quad (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2,$$

avec

$$l = l_1 - g(l_1 - l_2), \quad f = f_1 - g(l_1 - l_2),$$

et la condition

$$l > 0.$$

En partant comme ci-dessus d'une valeur approchée de t, que l'on prend comme origine du temps, et gardant les

mêmes hypothèses et les mêmes notations, l'équation G = o prend la forme approchée

$$[x_0 - \xi_0 + t(x_0' - \xi_0')](x_0' - \xi_0') + [y_0 - \eta_0 + t(y_0' - \eta_0')](y_0' - \eta_0') + l_0\zeta_0' \operatorname{tg} f_0 = 0,$$

ou

$$mn \cos(M - N) + n^2 t + l_0\zeta_0' \operatorname{tg} f_0 = 0,$$

et l'on en déduit une meilleure valeur de l'époque cherchée, avec laquelle on peut recommencer le calcul, jusqu'à ce qu'on trouve $t = 0$ dans les limites d'exactitude que l'on veut obtenir.

En général une grande précision n'est pas nécessaire ici, et l'on supprime alors le dernier terme de l'équation G = o, qui est toujours très petit en raison du facteur tang f. On a ainsi

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M - N),$$

et si l'on ne veut pas recommencer le calcul, on voit qu'il faut déterminer la valeur correspondante de l par l'équation

$$l^2 = [x_0 - \xi_0 + t(x_0' - \xi_0')]^2 + [y_0 - \eta_0 + t(y_0' - \eta_0')]^2 = m^2\sin^2(M - N);$$

par suite la grandeur de l'éclipse est

$$g_0 = \frac{l_1 - |\, m \sin(M - N)\,|}{l_1 - l_2}.$$

En rapprochant ces résultats de ceux indiqués ci-dessus, on voit que l'époque moyenne entre les deux époques relatives à une même phase donnée est sensiblement l'époque de la plus grande phase.

Comme application, cherchons les circonstances de l'éclipse du 24 Janvier 1925, à Paris.

On a

$$\varphi = 48°50'11'', \qquad L = -9^m20^s,93 = -2°20',2\,;$$

par suite, d'après les données du chapitre IV, l'aplatissement étant $\frac{1}{297}$,

$$\log\cos\psi = \bar{1},81920, \qquad \log[(1 - \alpha)\sin\psi] = \bar{1},87460\,;$$

nous négligerons la réfraction et l'altitude.

Prenons comme origine du temps 0^h, et faisons $g = 1$. On trouve

$$\xi_0 = 0,4604, \quad \eta_0 = 0,8629, \quad \zeta_0 = 0,199,$$
$$\xi_0' = 0,1236, \quad \eta_0' = -0,0397,$$

de sorte que

$$x_0 - \xi_0 = -0,5215, \quad y_0 - \eta_0 = 0,0032,$$
$$x_0' - \xi_0' = 0,4480, \quad y_0' - \eta_0' = 0,1211, \quad l_0 = 0,5392.$$

On en déduit que l'éclipse commence à peu près à $-0^h,04$ pour finir à $2^h,20$; la plus grande phase a lieu à $1^h,08$, et la grandeur est alors 0,75, de sorte que l'éclipse n'est que partielle ; la fin de l'éclipse se produit d'ailleurs au-dessous de l'horizon, et par suite n'est pas visible.

Recommençant le calcul pour le commencement de l'éclipse, on trouve $-0^h,0396$ pour son heure exacte, soit le 24 Janvier à $14^h 57^m 37^s$: l'angle Q correspondant à ce premier contact extérieur est 270°.

De même l'heure de la plus grande phase est plus exactement $16^h 2^m,5$, et la grandeur de l'éclipse est 0,750.

Prédiction de l'éclipse générale. Formules préliminaires.— Le problème le plus important, mais aussi le plus délicat, de la théorie des éclipses, est celui de la prédiction de l'éclipse générale ; il consiste à déterminer l'ensemble des points de la surface de la Terre qui peuvent voir effectivement l'éclipse partielle, ou bien l'éclipse totale ou annulaire, ou plus généralement une phase de grandeur donnée : ce problème est résolu à l'avance pour chaque éclipse dans les éphémérides, et des cartes convenablement dressées montrent tout de suite quelles seront les circonstances principales de l'éclipse en un lieu donné, et permettent d'avoir des heures approchées de son commencement, de sa fin et de son milieu.

Il convient tout d'abord de préparer les formules générales déjà établies de la façon le mieux appropriée pour le calcul.

En désignant toujours par α l'aplatissement terrestre, faisons d'abord

$$\begin{cases} p \sin D = \sin d, \\ p \cos D = (1 - \alpha) \cos d, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} p \sin (D - d) = \alpha \sin d \cos d, \\ p \cos (D - d) = 1 - \alpha \cos^2 d; \end{cases}$$

négligeant donc le carré de α, ainsi que le produit de α par la variation de d, et appelant d_0 la valeur de d pour $t = 0$, on a

$$\begin{cases} p = 1 - \alpha \cos^2 d_0, \\ D = d + \alpha \sin d_0 \cos d_0. \end{cases}$$

Remplaçons maintenant les angles L et φ (ou ψ) qui définissent la position d'un lieu M à la surface de la Terre par deux autres β et γ tels que

$$\begin{cases} \cos \beta \sin \gamma = \cos \psi \sin (H - L), \\ \cos \beta \cos \gamma = \cos D \sin \psi - \sin D \cos \psi \cos (H - L), \\ \quad \sin \beta = \sin D \sin \psi + \cos D \cos \psi \cos (H - L), \end{cases}$$

β étant comme φ, ψ, d, D compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On tire inversement de ces formules

$$(a) \begin{cases} \cos \psi \sin (H - L) = \cos \beta \sin \gamma, \\ \cos \psi \cos (H - L) = \cos D \sin \beta - \sin D \cos \beta \cos \gamma = \sigma \sin (S - D), \\ \quad \sin \psi \quad = \sin D \sin \beta + \cos D \cos \beta \cos \gamma = \sigma \cos (S - D), \end{cases}$$

en déterminant les deux auxiliaires σ, S par les relations

$$(a') \qquad \sigma \sin S = \sin \beta, \qquad \sigma \cos S = \cos \beta \cos \gamma;$$

et en ajoutant la relation

$$(a'') \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 - \alpha} = \operatorname{tg} \psi \, [0{,}00146],$$

un nombre étant représenté par son logarithme placé entre crochets, on a de la façon la plus simple l'ensemble des formules qui permettent de passer de la connaissance de β, γ à un instant donné à celle des coordonnées géographiques L, φ, du point M.

D'autre part, on a exactement

$$(b) \qquad \begin{cases} \xi = (1 + h) \cos \beta \sin \gamma, \\ \eta = (1 + h) p \cos \beta \cos \gamma, \end{cases}$$

et dans ces formules, l'altitude h doit être regardée comme

provenant uniquement de l'effet de la réfraction, car dans la prédiction générale de l'éclipse, on doit supposer nulle l'altitude proprement dite : on a donc, ici et dans la suite, $h = 0$, sauf dans le voisinage immédiat de l'horizon ; et si l'on suppose que l'on observe exactement dans l'horizon, on a

$$1 + h = n_0 = 1,0003.$$

On a encore

$$\zeta = \frac{(1+h)(1-\alpha)}{p}\left[p^2 \sin D \cos\psi + \frac{p^2}{(1-\alpha)^2}\cos D \cos\psi \cos(H-L)\right];$$

négligeant comme ci-dessus α^2 et $\alpha d'$, on peut prendre ici

$$p^2 = 1 - 2\alpha \cos^2 D, \qquad \frac{p^2}{(1-\alpha)^2} = 1 + 2\alpha \sin^2 D,$$

et par suite écrire

$$\zeta = \frac{(1+h)(1-\alpha)}{p}(\sin\beta - 2\alpha \sin D \cos D \cos\beta \cos\gamma),$$

ou encore

(b′) $$\zeta = \frac{(1+h)(1-\alpha)}{p}\sin(\beta - 2\alpha \sin D \cos D \cos\gamma);$$

et si l'on néglige la réfraction et l'aplatissement, il vient simplement

$$\zeta = \sin\beta.$$

Négligeant de même la réfraction et la variation très petite de d, on a aussi, d'après des formules déjà indiquées,

(c) $$\begin{cases} \xi' = H'(-\eta \sin d + \zeta \cos d), \\ \eta' = H'\xi \sin d, \\ \zeta' = -H'\xi \cos d. \end{cases}$$

Les équations qui expriment que l'on voit du point M, et à l'époque t, une phase de grandeur g, sont

(d) $$x - \xi = l \sin Q, \qquad y - \eta = l \cos Q,$$

avec

(e) $$l = u - \sin\beta \operatorname{tg} f,$$

d'après la valeur approchée de ζ indiquée ci-dessus, suffisante ici à cause de la petitesse de f; d'ailleurs

(e′) $$u = u_1 - g(u_1 - u_2), \quad f = f_1 - g(f_1 - f_2),$$

et l_1, l_2 seront les valeurs de l qui correspondent à u_1, f_1, ou bien u_2, f_2 ; on peut toujours prendre f pour tg f, et donner à f_1, f_2 leurs valeurs moyennes relatives à l'époque $t = 0$.

Si C est le point du bord de la Lune, situé sur SL, qui correspond à la phase g, l'angle de position du point C par rapport au centre du Soleil est précisément Q ou $\pi + Q$, suivant que f est positif ou négatif, si du moins la grandeur g n'est pas voisine de $\frac{1}{2}$.

La distance zénithale apparente ζ_0 de la direction MC est facile à calculer, par application des formules (6) et (12) : en négligeant l'aplatissement α, on a d'abord

$$\lambda = \cos\beta \sin\gamma, \qquad \mu = \cos\beta\cos\gamma,$$

et l'on voit ensuite sans peine que l'on a exactement

$$\nu = p\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\sin\beta.$$

Si donc R est la réfraction astronomique relative à ζ_0, la formule (12) donne

$$(f) \qquad \cos(\zeta_0 + R) = p\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\sin\beta + f\cos\beta\cos(\gamma - Q),$$

en ne négligeant que le produit αf.

Si on laisse complètement de côté α, f et R, on voit que β représente précisément la hauteur apparente de la direction MC, et ce résultat est le plus souvent suffisant : en particulier, on voit que la condition de visibilité du phénomène envisagé est $\beta > 0$, sauf peut-être dans le voisinage immédiat de l'horizon.

Si l'on observe la direction MC dans l'horizon même, on a plus exactement, en appelant R_0 la réfraction horizontale (soit 34',5 ou 0°,575) et négligeant seulement les quantités du second ordre par rapport à α, f, R_0,

$$(f') \qquad \beta = -R_0 - f\cos(\gamma - Q).$$

On observe une éclipse centrale si l'on a

$$x - \xi = 0, \qquad y - \eta = 0,$$

c'est-à-dire en faisant $l = 0$ dans les formules générales (d) :

l'éclipse est alors totale ou annulaire suivant que la quantité l_2 est positive ou négative, et sa grandeur est $\frac{l_1}{l_1 - l_2}$.

Il convient ici de remplacer la direction MC par la direction MS du centre du Soleil, ce qui revient évidemment à supposer $f = 0$ dans les formules générales (f) ou (f').

Faisons

$$x = m \sin M, \qquad \frac{y}{p} = m \cos M \qquad (m > 0);$$

les équations générales (d) deviennent

$$\begin{cases} (1 + h) \cos \beta \sin \gamma = m \sin M - l \sin Q, \\ (1 + h) \cos \beta \cos \gamma = m \cos M - \frac{l}{p} \cos Q; \end{cases}$$

posons alors

$$\sin Q = q \sin Q', \qquad \frac{1}{p} \cos Q = q \cos Q',$$

de sorte qu'en négligeant toujours le carré α, on ait

$$q = 1 + (1 - p) \cos^2 Q';$$

les équations précédentes prennent la forme la plus simple

$$(g) \qquad \begin{cases} (1 + h) \cos \beta \sin \gamma = m \sin M - lq \sin Q', \\ (1 + h) \cos \beta \cos \gamma = m \cos M - lq \cos Q', \end{cases}$$

q étant un facteur très voisin de l'unité, fonction de l'angle Q' : une table de quelques lignes permettra d'obtenir ce facteur à vue.

On peut écrire encore

$$(g') \qquad \begin{cases} (1 + h) \cos \beta \sin (\gamma - M) = - lq \sin (Q' - M), \\ (1 + h) \cos \beta \cos (\gamma - M) = m - lq \cos (Q' - M). \end{cases}$$

On obtient une autre forme avantageuse des mêmes équations en procédant de la façon suivante.

Faisons encore

$$x' = n \sin N, \qquad \frac{y'}{p} = n \cos N \qquad (n > 0),$$

puis

$$\mu = m \sin (M - N), \qquad t - t_0 = \frac{m}{n} \cos (M - N);$$

les quantités n, N, μ, t_0 varieront avec une extrême lenteur pendant la durée de l'éclipse.

Les formules (g) donnent alors

$$(h)\quad \begin{cases} (1 + h)\cos\beta\sin(\gamma - N) = \mu - lq\sin(Q' - N), \\ (1 + h)\cos\beta\cos(\gamma - N) = n(t - t_0) - lq\cos(Q' - N), \end{cases}$$

et cette nouvelle forme sera la plus convenable lorsque le temps t sera l'une des inconnues dans la question à résoudre.

Lorsqu'on suppose le lieu d'observation M fixe, la phase g et la hauteur de la direction MC correspondante varient avec le temps t : il importe de savoir dans quel sens. La hauteur de MC est très sensiblement égale à β, et le sinus de β est égal à ζ dans les mêmes conditions d'exactitude ; de plus la dérivée ζ' a le signe de $-\sin\gamma$. La hauteur de MC sera donc croissante ou décroissante suivant que $\sin\gamma$ est négatif ou positif. Si, en particulier, la direction MC est dans le voisinage immédiat de l'horizon, on pourra dire qu'on observe l'éclipse au lever ou au coucher du Soleil suivant que l'on aura $\sin\gamma < 0$ ou $\sin\gamma > 0$. Ce résultat suppose que l'on néglige les petites quantités déjà laissées plusieurs fois de côté ; il pourrait être en défaut si $\sin\gamma$ était lui-même très petit : mais comme nous le verrons plus loin, il n'y a aucune utilité réelle à chercher plus de précision dans ce cas.

D'autre part, nous avons déjà vu que le produit lg', où g' désigne la dérivée de g par rapport au temps, avait toujours le signe contraire de la quantité

$$G = (x - \xi)(x' - \xi') + (y - \eta)(y' - \eta') + l\zeta' \operatorname{tg} f,$$

en négligeant seulement les très petites variations de u_1, u_2, f_1, f_2.

Remplaçons dans cette expression ξ', η', ζ' par leurs valeurs (c), puis ξ par $x - l\sin Q$, η par $y - l\cos Q$; on aura

$$\frac{G}{l} = \sin Q(x' + yH'\sin d - \zeta H'\cos d) + \cos Q(y' - xH'\sin d) - \xi H'\cos d \operatorname{tg} f.$$

Si donc on pose

$$A = \frac{x' + yH'\sin d}{H'\cos d}, \qquad B = p\,\frac{-y' + xH'\sin d}{H'\cos d},$$

on voit finalement que g' s'annule en même temps que le pre-

mier membre de l'équation

$(j)\qquad (A - \zeta)\sin Q' - B\cos Q' - f\cos\beta\sin\gamma = 0,$

et est généralement de signe contraire à celui de ce premier membre, à la condition de négliger encore la réfraction, et les quantités du second ordre par rapport à α et f.

Si, plus simplement, on néglige complètement α et f, on peut remplacer l'équation précédente par

$(j')\qquad (A - \sin\beta)\sin Q' - B\cos Q' = 0,$

et y confondre si l'on veut Q' avec Q.

Si l'on pose encore

$$A = C\cos F,\qquad B = C\sin F\qquad (C > 0),$$

et que l'on suppose l'observation faite dans l'horizon, on voit que g' a le signe contraire à celui de $\sin(Q' - F)$ et s'annule avec cette quantité.

Ces résultats sont suffisamment exacts pour la pratique.

Pour mettre en œuvre les diverses formules que nous venons d'établir, il est nécessaire de réunir les valeurs des constantes qui y figurent, et de dresser des tables permettant d'obtenir à vue les quantités H, D, u_1, u_2, $\log m$, M, $\log\frac{1}{n}$, N, $\log\mu$, t_0, A, B, $\log C$, F. Il conviendra en général de dresser ces tables en faisant varier l'argument t de 10^m en 10^m : nous allons reproduire ici celles qui sont relatives à l'éclipse du 24 Janvier 1925, mais en nous contentant de faire varier t de demi-heure en demi-heure, pour abréger.

On a d'abord

$$R_0 = 0^\circ{,}575,\qquad \log(1 + h) = 0{,}00013\quad\text{(dans l'horizon)},$$

$$f_1 = 0^\circ{,}272,\quad f_2 = -0^\circ{,}271,\quad \log\operatorname{tg} f_1 = \bar{3}{,}6766,\quad \log\operatorname{tg} f_2 = \bar{3}{,}6745n,$$

$$\log p = \bar{1}{,}99869,\qquad \log(1 - p) = \bar{3}{,}4773,\qquad \log H' = \bar{1}{,}41794;$$

puis

t	H	D	u_1	u_2
— 2,0	11°,946	— 19°,310	0,54001	0,00588
— 1,5	19, 445	305	06	82
— 1,0	26, 945	300	11	78
— 0,5	34, 444	295	15	74
0,0	41, 944	290	18	71
0,5	49, 443	285	21	68
1,0	56, 943	280	22	67
1,5	64, 442	276	23	66
2,0	71, 942	271	24	65

t	log m	M	log $\frac{1}{n}$	N	log μ	t_0
— 2,0	0,14486	— 59°,632	0,23854	81°,903	$\bar{1}$,93867 n	— 0,1070
— 1,5	0,07320	— 50, 903	51	894	75 n	73
— 1,0	0,00428	— 38, 794	49	886	79 n	76
— 0,5	$\bar{1}$,95310	— 22, 735	47	877	83 n	78
0,0	$\bar{1}$,93995	— 4, 022	48	869	84 n	80
0,5	$\bar{1}$,97172	13, 878	49	860	82 n	83
1,0	0,03300	28, 242	51	851	78 n	86
1,5	0,10436	38, 771	54	842	72 n	89
2,0	0,17481	46, 345	59	833	65 n	93

t	A	B	log C	F
— 2,0	2,0672	+ 0,0922	0,3158	+ 2°,55
— 1,5	2,0531	— 0,0077	3124	— 0, 22
— 1,0	2,0390	— 0,1076	3100	— 3, 02
— 0,5	2,0248	— 0,2074	3087	— 5, 85
0,0	2,0106	— 0,3072	3083	— 8, 69
0,5	1,9963	— 0,4069	3090	— 11, 52
1,0	1,9819	— 0,5066	3108	— 14, 34
1,5	1,9675	— 0,6062	3136	— 17, 12
2,0	1,9530	— 0,7057	3174	— 19, 87

De plus, on déterminera q en fonction de Q′ par la table suivante

Q′		log q	Q′		log q
0°	± 180°	0,00131	± 45°	± 135°	0,00065
± 5	± 175	130	± 50	± 130	54
± 10	± 170	127	± 55	± 125	43
± 15	± 165	122	± 60	± 120	33
± 20	± 160	115	± 65	± 115	23
± 25	± 155	107	± 70	± 110	15
± 30	± 150	098	± 75	± 105	09
± 35	± 145	088	± 80	± 100	04
± 40	± 140	077	± 85	± 95	01
± 45	± 135	065	± 90	± 90	00

Ainsi qu'on le voit, toutes ces tables s'interpolent à vue, sauf bien entendu celles relatives à log m et M. La quantité H a une variation uniforme, et il en est presque de même pour A, B, F ; les autres D, u_1, u_2, log $\frac{1}{n}$, N, log μ, t_0, log C, restent

très sensiblement constantes pendant la durée de l'éclipse ; par suite, dans une étude analytique, nécessairement approchée, des circonstances que peut présenter une éclipse, on devra les regarder comme effectivement constantes, en leur donnant leurs valeurs pour l'époque définie par l'équation $t = t_0$ par exemple, tandis que H, A, B, F varieront proportionnellement au temps.

Il convient de préciser ces observations. D'après les formules (4) qui définissent x, y, on a sensiblement pendant la durée de l'éclipse, et en négligeant la variation de r,

$$x' = r \cos \delta \frac{d(\alpha - \alpha')}{dt}, \qquad y' = r \frac{d(\delta - \delta')}{dt},$$

et par suite ces quantités sont sensiblement constantes : le mouvement du point Ω, de coordonnées x, y dans le plan des xy, est un mouvement rectiligne uniforme, le long d'une droite Δ. En acceptant cette approximation, et confondant p avec l'unité, n est la vitesse de Ω, et sin N, cos N sont les cosinus directeurs par rapport aux axes Oxy, de la droite Δ orientée dans le sens du mouvement du point Ω ; μ est la distance de l'origine O à la droite Δ, comptée positivement suivant la demi-droite dont les cosinus directeurs sont cos N, — sin N ; et t_0 est l'époque du passage du point Ω par le pied de cette distance.

On a d'une façon approchée $r = 60$, et en prenant l'heure pour unité de temps, $\frac{d(\alpha - \alpha')}{dt} = 0^\circ,5$. D'autre part, la valeur absolue du rapport $\frac{d\delta}{d\alpha}$ est inférieure à la tangente de l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'équateur, c'est-à-dire en gros, à $\frac{1}{2}$. Il en résulte que l'angle N reste toujours compris entre 60° et 120°, et que le nombre n est voisin de $\frac{1}{2}$, plus exactement compris entre 0,50 et 0,59.

En se reportant aux expressions de A, B, et faisant toujours $p = 1$, on trouve encore sans peine

$$\left\{\begin{array}{l} AH' \cos D = (n - \mu H' \sin D) \sin N + nH' \sin D(t - t_0) \cos N, \\ BH' \cos D = -(n - \mu H' \sin D) \cos N + nH' \sin D(t - t_0) \sin N, \end{array}\right.$$

et ces formules montrent comment varient A et B : puisque la déclinaison D est inférieure à 24° en valeur absolue, et que la dérivée H′ vaut 15° ou environ $\frac{1}{4}$, le nombre A reste voisin de 2, tandis que B, positif ou négatif, est notablement plus petit, et varie plus rapidement.

On a aussi

$$\begin{cases} C \sin (F - N) = - \dfrac{n - \mu H' \sin D}{H' \cos D}, \\ C \cos (F - N) = \dfrac{n H' \sin D (t - t_0)}{H' \cos D}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} C^2 = \dfrac{(n - \mu H' \sin D)^2 + n^2 H'^2 \sin^2 D (t - t_0)^2}{H'^2 \cos^2 D}, \\ \operatorname{cotg} (F - N) = - \dfrac{n H' \sin D}{n - \mu H' \sin D}(t - t_0). \end{cases}$$

Ceci nous montre que C reste aussi voisin de 2, présentant un minimum pour $t = t_0$, et variant lentement ; de plus, l'angle F — N reste voisin de — 90°, et l'on peut écrire d'une façon approchée

$$F = N - 90^\circ + \frac{n H' \sin D}{n - \mu H' \sin D}(t - t_0) ;$$

d'après ce que nous avons dit de N, la valeur absolue de F est toujours d'une grandeur médiocre.

Une dernière remarque, enfin, nous sera nécessaire.

Supposons que le temps reste fixe, et qu'on fasse varier la latitude φ du lieu M d'observation, mais non sa longitude ; la phase g est alors une fonction de φ, et en négligeant les variations de l_1 et l_2, l'équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l^2$$

donne, par différentation,

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \sin Q + \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \cos Q = (l_1 - l_2) \frac{\partial g}{\partial \varphi} ;$$

si l'on néglige aussi l'aplatissement et la réfraction, on a

$$\frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin(H-L),$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varphi} = \cos D\cos\varphi + \sin D\sin\varphi\cos(H-L),$$

et par suite $\frac{\partial g}{\partial\varphi}$ a le signe de la quantité

$$\cos D\cos\varphi\cos Q - \sin Q\sin\varphi\sin(H-L) + \sin D\sin\varphi\cos Q\cos(H-L);$$

sin D reste toujours assez petit en valeur absolue, et si l'on suppose qu'il en est de même de sin φ et sin Q, on peut dire que $\frac{\partial g}{\partial\varphi}$ a le signe de cos Q.

D'après l'équation (j') et les observations faites ci-dessus, l'angle Q vérifie précisément ces conditions lorsque la phase g observée en M est maxima ou minima, le lieu restant fixe et le temps variant : la fonction g de φ sera donc alors croissante ou décroissante suivant que l'angle Q, pris entre $-\pi$ et π, sera aigu ou obtus en valeur absolue ; si du moins la latitude est elle-même médiocre.

Eclipse centrale. Limites de l'éclipse totale ou annulaire. — En vue de la préparation des observations futures, il est important de déterminer à l'avance avec précision l'ensemble des points de la Terre pour lesquels l'éclipse sera totale ou annulaire, et la durée correspondante de la phase totale ou annulaire.

Soit C le cône circonscrit extérieurement à la Lune et au Soleil, ou cône d'ombre portée par la Lune : les points M de la Terre qui voient l'éclipse totale ou annulaire à l'époque t sont ceux situés à l'intérieur du cône C à cette époque, ayant en outre le Soleil au-dessus de l'horizon. Or la section de ce cône par un plan perpendiculaire à son axe passant par le point M est un cercle de rayon très petit, égal à la valeur absolue de l_2 : donc, d'une façon générale, si le cône C rencontre la Terre, il en sera de même de son axe, et l'intersection se composera de deux courbes distinctes, l'une tout entière au-dessus du plan xy, c'est-à-dire du côté des z positifs, l'autre

au-dessous. Les points situés à l'intérieur de la première de ces courbes, que nous appellerons c, sont ceux qui voient l'éclipse totale ou annulaire à l'époque t : ils sont définis par les conditions

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leqslant l_2^2, \qquad \zeta > 0.$$

Le point d'intersection avec la Terre de l'axe LS du cône C, situé à l'intérieur de la courbe c, soit P, voit une éclipse centrale, et répond aux conditions

$$x-\xi=0, \quad y-\eta=0, \quad \zeta>0.$$

Ces conclusions sont en défaut si l'axe du cône C coupe la Terre en deux points très voisins, réels ou imaginaires d'ailleurs ; l'intersection du cône avec la Terre se réduit alors à une seule courbe, dont tous les points sont très voisins du plan xy, et la détermination exacte des points situés à l'intérieur de cette courbe qui voient l'éclipse totale ou annulaire est sans intérêt réel. Cette circonstance se produit d'une façon régulière dans le voisinage du commencement ou de la fin de l'éclipse centrale ; elle peut se présenter aussi d'une façon très exceptionnelle, lorsque l'axe du cône C, dans son mouvement par rapport à la Terre, ne fait que passer très près de la surface de celle-ci, extérieurement ou intérieurement.

Laissant ces exceptions de côté, occupons-nous d'abord de la détermination des points P qui voient l'éclipse centrale, et dont l'ensemble constitue la ligne de centralité. D'après les conditions ci-dessus, et la définition des quantités m, M, les coordonnées β, γ du point P à l'époque t sont définies par les relations

$$\gamma=\mathrm{M}, \quad \cos\beta=m, \quad \sin\beta>0.$$

Le point P n'existe donc que sous la condition $m \leqslant 1$, et se détermine alors immédiatement.

Les extrémités de la ligne de centralité sont les points P_1, P_2 pour lesquels les points L, S paraissent confondus dans l'horizon. Par suite, d'après les formules (f') et (h), où l'on doit faire $l=0$, $f=0$, on a

$$\left\{\begin{aligned} &(1+h)\cos\beta\sin(\gamma-\mathrm{N})=\mu,\\ &n(t-t_0)=(1+h)\cos\beta\cos(\gamma-\mathrm{N}),\\ &\beta=-\mathrm{R}_0;\end{aligned}\right.$$

on peut d'ailleurs prendre avec une exactitude suffisante $(1+h)\cos\beta = 1{,}003$, et nous ferons de même dans tous les cas semblables, c'est-à dire quand il s'agit d'un phénomène observé dans l'horizon, en appelant k cette quantité constante.

La table de m fournit immédiatement les valeurs approchées de t nécessaires pour la résolution exacte des équations précédentes : ce sont celles qui donnent m très voisin de 1, et la condition de leur existence est $|\mu| < 1$. Pour le commencement de l'éclipse, on a $\cos(\gamma - N) < 0$, pour la fin, $\cos(\gamma - N) > 0$.

Pour déterminer la durée τ de la phase totale ou annulaire en un point P de la ligne de centralité, on calculera d'abord la quantité

$$l_2 = u_2 - \sin\beta \operatorname{tg} f_2,$$

dont le signe indiquera la qualité de l'éclipse. Puis, se reportant à la manière de calculer les époques d'une phase donnée, et n'oubliant pas qu'ici les quantités $x - \xi$, $y - \eta$ sont nulles, on aura immédiatement

$$\tau = \frac{2\,|\,l_2\,|}{\sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2}},$$

x', y', ξ', η' se rapportant au point P et à l'époque t.

On a d'ailleurs, puisque $\xi = x$, $\eta = y$,

$$x' - \xi' = x' + y\mathrm{H}'\sin d - \zeta\mathrm{H}'\cos d = (\mathrm{A} - \zeta)\,\mathrm{H}'\cos d,$$
$$y' - \eta' = y' - x\mathrm{H}'\sin d = -\frac{\mathrm{B}}{p}\,\mathrm{H}'\cos d;$$

confondant ζ avec $\sin\beta$, p avec 1, posons alors

$$\omega\sin\mathrm{Q}_0 = \mathrm{B}, \qquad \omega\cos\mathrm{Q}_0 = \mathrm{A} - \sin\beta, \qquad \omega > 0;$$

on aura finalement, en exprimant τ en secondes,

$$\tau = \frac{7\,200\,|\,l_2\,|}{\omega\mathrm{H}'\cos d},$$

avec une exactitude suffisante.

Aux extrémités de la ligne de centralité, on a $\sin\beta = 0$, $l_2 = u_2$, et l'on peut par suite confondre ω avec la quantité C.

La grandeur de l'éclipse au point P est égale à $\dfrac{l_1}{l_1 - l_2}$; si donc

on néglige les variations de u_1, u_2, f_1, f_2, on voit sans peine que cette quantité varie comme sin β, ou en sens inverse de m : elle sera donc maxima quand m sera minimum ; or

$$m^2 = x^2 + \frac{y^2}{p^2};$$

la condition du minimum de m est par suite

$$xx' + \frac{yy'}{p^2} = mn \cos(\mathrm{M} - \mathrm{N}) = 0;$$

cette condition est vérifiée pour $t = t_0$, équation facile à résoudre, et le minimum de m est la valeur absolue de la quantité μ correspondante ; on a en même temps $\mathrm{M} = \mathrm{N} \pm 90°$, suivant que μ est positif ou négatif. Il est clair que le maximum de grandeur correspondant est aussi la grandeur maxima de l'éclipse.

Les points M de la courbe c envisagée précédemment, renfermant à son intérieur les points de la Terre qui voient l'éclipse totale ou annulaire à l'époque t, sont définis par les relations

$$x - \xi = l_2 \sin \mathrm{Q}, \qquad y - \eta = l_2 \cos \mathrm{Q}, \qquad \zeta > 0,$$

ou bien

$$\left\{ \begin{aligned} \cos\beta \sin(\gamma - \mathrm{M}) &= - l_2 q \sin(\mathrm{Q}' - \mathrm{M}), \\ \cos\beta \cos(\gamma - \mathrm{M}) &= m - l_2 q \cos(\mathrm{Q}' - \mathrm{M}), \end{aligned} \right. \qquad \zeta > 0,$$

Q′ étant un paramètre variable.

En raison de la petitesse de cette courbe, il est clair que l'on peut donner à la quantité ζ qui figure dans l'expression $u - \zeta \operatorname{tg} f_2$ de l_2, la valeur sin β qu'elle prend au point P ; et si l'on peut négliger le carré de l_2, et la différence $q - 1$, on écrira simplement

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma - \mathrm{M} &= - l_2 \sin(\mathrm{Q}' - \mathrm{M}), \\ \cos\beta &= m - l_2 \cos(\mathrm{Q}' - \mathrm{M}). \end{aligned} \right.$$

En tous les points M, l'une des deux phases g qui correspondent aux apparences de la Lune et du Soleil, est égale à l'unité ; si l'éclipse est totale, c'est sa grandeur proprement dite g_0 ; si l'éclipse est annulaire, c'est au contraire l'autre phase g_0'. Supposons que cette phase g, égale à 1, soit en

même temps phase maxima ou minima pour le point envisagé : cela veut dire qu'en ce lieu, l'éclipse totale ou annulaire finit en même temps qu'elle commence, en d'autres termes, que les disques du Soleil et de la Lune ne font que s'effleurer intérieurement, sans que l'un d'eux vienne recouvrir l'autre entièrement. Ces points M′, M″ devront vérifier la condition (j) ou plus simplement (j'), de sorte que

$$\operatorname{tg} Q' = \frac{B}{A - \sin \beta};$$

cette équation, jointe aux précédentes, permettra de déterminer exactement, par approximations successives, les valeurs de β, γ relatives à M′, M″.

Il est clair que le problème aura deux solutions, pour lesquelles Q′ sera voisin de Q_0 ou de $Q_0 + \pi$, d'après la valeur de Q_0 indiquée précédemment.

Si l_2 est suffisamment petit, on pourra sans inconvénient confondre Q′ avec Q_0 ou $Q_0 + \pi$. en utilisant les formules déjà simplifiées qui donnent γ — M et cos β.

Le lieu géométrique des points M′, M″ limite évidemment l'ensemble des points qui peuvent voir, à une époque quelconque, l'éclipse totale ou annulaire ; il se compose de deux courbes très voisines de la ligne de centralité, de part et d'autre de cette ligne : ce sont les limites australe et boréale de l'éclipse totale ou annulaire.

D'après les remarques faites à la fin du paragraphe précédent, et en observant que la phase g augmente quand l'éclipse devient totale, diminue quand l'éclipse devient annulaire, on voit que généralement la limite australe correspond à l'hypothèse Q′ voisin de Q_0 ou de $Q_0 + \pi$, suivant que l'éclipse est totale ou annulaire, tandis que la limite boréale correspond aux hypothèses contraires.

Il peut arriver dans certains cas, que ces dénominations ne se montrent pas entièrement conformes à la réalité : on les conserve cependant toujours, et il en sera de même dans les cas analogues que nous rencontrerons encore.

Le lieu des points M′, M″ est aussi manifestement l'enveloppe des courbes c à la surface de la Terre : ceci est évident

géométriquement aussi bien qu'analytiquement, d'après la façon même dont on a formé l'équation (j).

Nous devons encore examiner comment se terminent les limites australe et boréale que nous venons de définir, en des points évidemment voisins des extrémités P_1, P_2 de la ligne de centralité. Le contact du Soleil et de la Lune est alors observé dans l'horizon, et d'après les équations (h), (f'), (j'), on a

$$\left\{\begin{aligned} &k \sin(\gamma - N) = \mu - u_2 q \sin(Q' - N),\\ &n(t - t_0) = k \cos(\gamma - N) + u_2 q \cos(Q' - N),\\ &\beta = - R_0 - f_2 \cos(\gamma - Q'),\end{aligned}\right.$$

l'angle Q' recevant les valeurs F ou $\pi + F$ pour les extrémités de la limite australe ou boréale si l'on a $u_2 > 0$; dans le cas contraire, on intervertira le rôle de ces deux lignes. Les deux premières des relations précédentes fourniront alors les inconnues t, γ, toujours voisines de celles qui correspondent aux points P_1, P_2. Si comme nous l'avons déjà fait, on néglige $q - 1$ et le carré de u_2, et si l'on fait correspondre t, γ au point P_1 ou P_2, tandis que $t + dt$, $\gamma + d\gamma$ correspondront aux points voisins cherchés, on a immédiatement

$$d\gamma = - u_2 \sin(Q' - N) \operatorname{séc}(\gamma - N),$$

et par suite

$$n dt = u_2 \cos(\gamma - Q') \operatorname{séc}(\gamma - N),$$

avec une précision bien suffisante. Les valeurs de u_2, N, F sont celles qui correspondent à l'époque t.

Si dans les équations ci-dessus, on regarde Q' comme un paramètre variable, il est clair qu'elles définissent l'ensemble des points qui, dans le voisinage du commencement ou de la fin de l'éclipse centrale, observent dans l'horizon un contact intérieur du Soleil et de la Lune ; et si l'on prend Q' tel que t soit minimum ou maximum, on obtient le commencement ou la fin de l'éclipse totale ou annulaire.

En faisant varier γ, Q', t, et écrivant que $dt = 0$, on a ainsi, en négligeant la variation de q,

$$k \cos(\gamma - N) d\gamma + u_2 q \cos(Q' - N) dQ' = 0,$$
$$k \sin(\gamma - N) d\gamma + u_2 q \sin(Q' - N) dQ' = 0,$$

et par suite

$$\sin(\gamma - Q') = 0;$$

on voit alors sans peine qu'il faut prendre $Q' - \gamma = 0$, ou bien $Q' - \gamma = \pi$, pour avoir le commencement et la fin de l'éclipse totale ou annulaire.

Comme précédemment d'ailleurs, on fera le calcul en corrigeant simplement les valeurs de t, γ qui correspondent au commencement et à la fin de l'éclipse centrale.

Appliquant tout ce que nous venons de dire au cas de l'éclipse du 24 Janvier 1925, que l'on reconnaît immédiatement être totale, on trouvera les résultats résumés dans le tableau suivant, le temps t étant le temps civil de Greenwich à cette date :

t	Limite boréale		Ligne centrale			Limite australe	
	L	φ	L	φ	τ	L	φ
$14^h.1^m,0$						$+95°.6'$	$+47°.52'$
2,0			$+95°.9'$	$+48°.33'$	$1^m.22^s$		
3,0	$+95°.13'$	$+49°.15'$					
$14^h.5$	84. 51	45. 36	82. 37	44. 6	1.42	80. 56	42. 50
10	76. 52	43. 9	75. 42	42. 2	1.55	74. 42	40. 59
20	67. 57	41. 11	67. 16	40. 12	2.12	66. 39	39. 16
30	61. 38	40. 31	61. 9	39. 34	2.23	60. 42	38. 40
40	56. 21	40. 32	55. 59	39. 37	2.29	55. 38	38. 43
50	51. 31	41. 6	51. 14	40. 10	2.32	50. 58	39. 17
$15^h.0$	46. 47	42. 9	46. 36	41. 13	2.31	46. 25	40. 18
10	41. 52	43. 44	41. 47	42. 46	2.27	41. 41	41. 51
20	36. 23	45. 57	36. 25	44. 57	2.18	36. 27	44. 0
30	29. 32	49. 12	29. 49	48. 6	2. 6	30. 4	47. 3
40	18. 29	54. 49	19. 37	53. 20	1.46	20. 32	52. 0
$15^h.44^m,1$	+ 2. 31	+ 62. 88					
45,1			+ 2. 10	+ 61. 50	1.21		
46,0						+ 1. 50	+ 61. 12

On a de plus pour le commencement de l'éclipse totale

$$t = 14^h 0^m,8, \quad L = 94°55', \quad \varphi = 47°55';$$

pour la fin

$$t = 15^h 46^m,3, \quad L = 2°10', \quad \varphi = 61°14';$$

et pour le maximum de l'éclipse

$$t = 14^h 53^m,5, \quad L = 49^\circ 36'. \quad \varphi = 40^\circ 29',$$

la grandeur étant alors 1,015.

En reportant tous ces points sur une carte, on aura devant les yeux l'ensemble des points d'où l'on peut observer l'éclipse totale dans des circonstances plus ou moins favorables : on voit d'ailleurs que la phase de totalité est de trop courte durée pour permettre de fructueuses observations.

Limites de l'éclipse générale. — Appelons maintenant K le cône circonscrit intérieurement à la Lune et au Soleil, ou cône de pénombre : les points M de la Terre qui voient à l'époque t le Soleil éclipsé dans une proportion quelconque, sont ceux situés à l'intérieur du cône K, ayant en outre le Soleil au-dessus de l'horizon.

L'intersection de la Terre et du cône K, quand elle existe, peut se composer d'une seule courbe h, ou bien de deux courbes distinctes h, h', dont la première est au-dessus du plan des xy, l'autre au-dessous. Dans ce second cas, soit (b), les points qui voient l'éclipse à l'époque t sont ceux situés à l'intérieur de la courbe h dont l'équation est

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l_1^2,$$

avec la condition supplémentaire $\beta > 0$.

Dans le premier cas, soit (a), les mêmes points sont ceux situés à l'intérieur de la courbe h, pour lesquels la hauteur apparente de la droite MC qui fixe la phase est positive : d'après les relations (f) et (f'), ces points vérifient les conditions

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leqslant l_1^2, \quad \beta \geqslant - R_0 - f \cos(\gamma - Q),$$

et leur ensemble est limité par une partie de la courbe h d'équation

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = l_1^2,$$

et par une partie de la courbe j, d'équation

$$\beta = - R_0 - f \cos(\gamma - Q).$$

Ces deux courbes doivent être limitées aux deux points, que

nous désignerons par H_1, qui leur sont communs (l'existence de ces deux points, évidente par la géométrie, va être vérifiée ci-dessous) ; et bien entendu, il faut retenir seulement la partie supérieure de la courbe h, c'est-à-dire la partie située du côté des z positifs.

Si l'on négligeait la réfraction, l'aplatissement et l'angle f, la courbe j serait évidemment le grand cercle de la sphère terrestre, dont le plan est perpendiculaire à la direction LS : elle en diffèrera toujours très peu.

Les points de la courbe h suffisamment éloignés du plan des xy pour que la réfraction n'intervienne pas, sont déterminés d'une façon générale par les équations (g'), soit

$$\begin{cases} \cos\beta \sin(\gamma - M) = -l_1 q \sin(Q' - M), \\ \cos\beta \cos(\gamma - M) = m - l_1 q \cos(Q' - M), \end{cases}$$

où Q' désigne un paramètre variable, et où l'on a

$$l_1 = u_1 - \sin\beta \operatorname{tg} f_1 ;$$

de plus, $\sin\beta$ est positif.

Pour résoudre exactement ces équations, on donnera à Q' une valeur arbitraire, et l'on déduira des deux premières, en confondant $l_1 q$ avec u_1, une valeur approchée de $\sin\beta$, savoir

$$\sin^2\beta = 1 - m^2 - u_1^2 + 2mu_1 \cos(Q' - M),$$

qui suffira pour avoir une valeur exacte de l_1 ; et comme q est fonction de Q', le calcul précis de β, γ s'achèvera immédiatement.

L'angle Q' pourra prendre toutes les valeurs entre $-\pi$ et $+\pi$, si l'on a $m < 1 - u_1$: on est alors dans le cas (b).

Si l'on a $1 + u_1 > m > 1 - u_1$, l'angle Q' ne pourra prendre qu'une série limitée de valeurs, le module de $Q' - M$ restant plus petit que l'angle P tel que

$$\cos P = \frac{m^2 + u_1^2 - 1}{2mu_1} ;$$

on est alors dans le cas (a), et l'on n'appliquera le calcul précédent qu'aux valeurs de Q' qui donnent à β une valeur supérieure à 6° environ.

Si l'on avait $m > 1 + u_1$, la courbe h n'existerait pas, et il n'y aurait éclipse pour aucun point de la Terre.

Revenons au cas (a) pour déterminer exactement les points H_1 qui limitent la portion utile de la courbe h; pour ces points, on a

$$\left\{\begin{aligned} k \sin(\gamma - M) &= -u_1 q \sin(Q' - M), \\ k \cos(\gamma - M) &= m - u_1 q \cos(Q' - M), \\ \beta &= -R_0 - f_1 \cos(\gamma - Q'), \end{aligned}\right.$$

puisqu'on observe alors le contact extérieur de la Lune et du Soleil dans l'horizon. Il en résulte

$$\cos(\gamma - M) = \frac{m^2 + k^2 - u_1^2 q^2}{2mk},$$

et il suffit d'avoir une valeur approchée de Q', permettant d'obtenir des valeurs exactes de q et β. Cette valeur de Q' sera donnée par la formule

$$\cos(Q' - M) = \frac{m^2 - k^2 + u_1^2}{2mu_1},$$

obtenue en négligeant $q - 1$. Il faut ajouter encore, pour éviter toute ambiguïté, que l'on a toujours

$$\sin(\gamma - M) \sin(Q' - M) < 0.$$

On voit que le problème admet deux solutions, ainsi que nous l'avons déjà supposé.

Les deux points H_1 peuvent être confondus en un seul point H_{11} : pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'équation exacte qui donne les valeurs de Q', soit

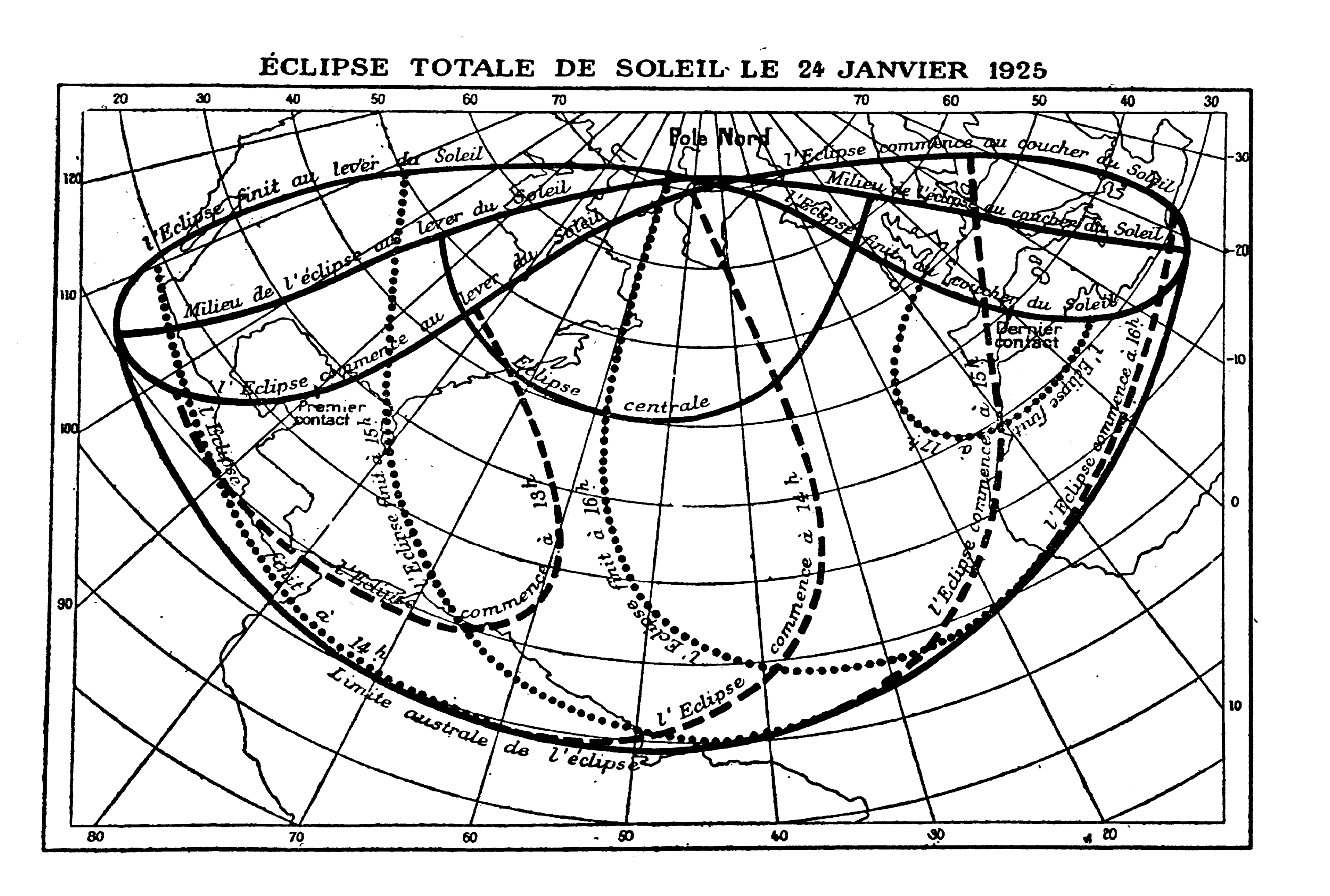
$$\cos(Q' - M) = \frac{m^2 - k^2 + u_1^2 q^2}{2mu_1 q},$$

ait une solution double; d'où la condition

$$\sin(Q' - M) = -\frac{k^2 - m^2 + u_1^2 q^2}{2mu_1 q^2} \frac{dq}{dQ'};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dq}{dQ'} = -(1 - p) \sin 2Q',$$


ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL LE 24 JANVIER 1925
Pole Nord
l'Eclipse finit au lever du Soleil
Milieu de l'éclipse au lever du Soleil
l'Eclipse commence au lever du Soleil
l'Eclipse commence au coucher du Soleil
Milieu de l'éclipse au coucher du Soleil
l'Eclipse finit au coucher du Soleil
Eclipse centrale
Premier contact
Dernier contact
l'Eclipse finit à 15h.
l'Eclipse commence à 13h.
l'Eclipse finit à 16h.
l'Eclipse commence à 14h.
l'Eclipse commence à 15h.
l'Eclipse finit à 17h.
l'Eclipse commence à 16h.
l'Eclipse finit à 14h.
Limite australe de l'éclipse
l'Eclipse

et l'on peut prendre simplement, avec une exactitude suffisante,

$$\sin(Q' - M) = 0,$$

car une grande précision est ici superflue : au surplus, il serait bien aisé de tenir compte de la différence $1 - p$ ici négligée.

On a aussi, dans ces conditions,

$$\sin(\gamma - M) = 0,$$

et d'une façon précise, en faisant $\varepsilon = \pm 1$,

$$\gamma = M, \quad \cos(Q' - M) = \varepsilon, \quad m = k + \varepsilon u_1 q;$$

il en résulte, d'après les formules qui définissent μ et t_0,

$$\begin{cases} \sin(\gamma - N) = \dfrac{\mu}{k + \varepsilon u_1 q}, \\ n(t - t_0) = (k + \varepsilon u_1 q)\cos(\gamma - N), \end{cases}$$

avec

$$\beta = -R_0 - \varepsilon f_1;$$

le nombre q est calculé en donnant à Q' la valeur γ ou M.

La table de m montre immédiatement des valeurs approchées pour les époques de ces phénomènes, et les formules précédentes permettent leur détermination exacte.

Si l'on fait $\varepsilon = +1$, la courbe h se réduit au point double isolé H_{11} : c'est le commencement ou la fin de l'éclipse générale, le cône K étant alors tangent extérieurement à la Terre. La condition (très approchée) d'existence pour ces points est $|\mu| < 1 + u_1$: c'est la condition même de l'éclipse.

Si l'on fait $\varepsilon = -1$, la courbe h admet le point H_{11} pour point double ordinaire : c'est la transition entre les deux cas généraux (a), (b) distingués précédemment, le cône K étant tangent intérieurement à la Terre. La condition d'existence de ces contacts intérieurs est $|\mu| < 1 - u_1$; et par suite, s'ils existent, l'éclipse est nécessairement centrale.

Les deux contacts extérieurs ou intérieurs peuvent être confondus ; on aurait alors, d'une façon très approchée,

$$|\mu| = 1 + \varepsilon u_1, \quad t = t_0, \quad \gamma = N \pm 90°,$$

le signe ambigu étant celui de μ.

S'il en était ainsi des contacts extérieurs, le cône K ne ferait que raser la Terre : il y aurait éclipse instantanée au seul point de contact.

Le lieu géométrique des points limites H_1 est une courbe L qui joue un rôle important, comme nous le verrons plus loin : elle est facile à construire d'après ce qui précède, en donnant à t des valeurs régulièrement espacées de 10^m en 10^m par exemple, entre le commencement et la fin de l'éclipse générale si les contacts intérieurs n'existent pas, et dans le cas contraire, entre le premier contact extérieur et le premier contact intérieur, ainsi qu'entre le dernier contact intérieur et le dernier contact extérieur.

Dans ce second cas, la courbe L sera évidemment composée de deux traits continus distincts fermés, tandis que dans le premier cas, elle est formée d'un seul trait semblable. Dans le cas intermédiaire, c'est-à-dire si les deux contacts intérieurs sont confondus en un même point, il est clair que la courbe L formée d'une seul trait, admet ce point comme point double.

Il est facile de vérifier analytiquement cette affirmation, et plus généralement, de préciser la variation des angles γ, Q et des coordonnées géographiques L, φ le long de la courbe L. En prenant les équations réduites qui correspondent à l'étude analytique approchée, on a simplement ici, pour définir un point H_1, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = 0, \quad \sin\gamma = x - u_1 \sin Q, \quad \cos\gamma = y - u_1 \cos Q, \\ \cos\varphi \sin(H - L) = \sin\gamma, \quad \cos\varphi\cos(H - L) = -\sin D \cos\gamma, \\ \sin\varphi = \cos D \cos\gamma, \end{array}\right.$$

et l'on en tire immédiatement, par différentiation,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\gamma}{dt} = -\dfrac{n\cos(Q - N)}{\sin(\gamma - Q)}, & \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{n\cos(\gamma - N)}{\sin(\gamma - Q)}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{\cos D \sin\gamma}{\cos\varphi}\dfrac{d\gamma}{dt}, & \dfrac{dL}{dt} = H' + \dfrac{\sin D}{\cos^2\varphi}\dfrac{d\gamma}{dt}. \end{array}\right.$$

On peut modifier avantageusement les expressions de $\frac{d\gamma}{dt}$ et $\frac{dL}{dt}$ en remplaçant dans la première $n \sin N$ ou x', $n \cos N$ ou y', par les quantités équivalentes $AH' \cos D - yH' \sin D$,

— $BH' \cos D + xH' \sin D$, et en substituant à x, y, dans ces quantités leurs valeurs $\sin\gamma + u_1 \sin Q$, $\cos\gamma + u_1 \cos Q$; on trouve ainsi

$$\frac{d\gamma}{dt} = -H' \sin D + CH' \cos D \frac{\sin(F-Q)}{\sin(\gamma - Q)},$$

et l'on peut écrire par suite

$$\sin D \frac{dL}{dt} = CH' \cos D \frac{\sin(F-Q)}{\sin(\gamma-Q)} - \frac{\cos^2 D \sin^2\gamma}{\cos^2\varphi}\frac{d\gamma}{dt}.$$

Les dérivées $\frac{d\gamma}{dt}$,.... deviennent infinies pour $\sin(\gamma - Q) = 0$: ceci s'explique en observant que les points correspondants sont les contacts extérieurs ou intérieurs du cône K, de sorte que les équations qui définissent les points H_1 ont alors une solution double.

Si les deux contacts intérieurs sont confondus, ces mêmes dérivées prennent une forme indéterminée au point correspondant, défini par les conditions

$$\mu = \pm(1 - u_1), \quad t = t_0, \quad \gamma = N \pm 90°, \quad Q = N \mp 90°,$$

les signes supérieurs ou inférieurs allant ensemble.

Pour lever l'indétermination, prenons les équations qui définissent en général les points H_1 sous la forme

$$\begin{cases} \sin(\gamma - N) = \mu - u_1 \sin(Q - N), \\ \cos(\gamma - N) = n(t - t_0) - u_1 \cos(Q - N), \end{cases}$$

et faisons-y

$$t = t_0 + dt, \ \gamma = N \pm 90° + d\gamma, \ Q = N \mp 90° + dQ, \ \mu = \pm(1 - u_1);$$

elles deviennent

$$\begin{cases} d\gamma^2 = u_1 dQ^2, \\ \mp d\gamma = n dt \mp u_1 dQ, \end{cases}$$

de sorte que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{u_1}\frac{dQ}{dt} = \frac{\mp n}{1 - \sqrt{u_1}}:$$

le radical $\sqrt{u_1}$ est susceptible d'un double signe, et par suite les dérivées $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$,...., ont deux valeurs distinctes au point

considéré, qui est nécessairement double pour la courbe L, avec tangentes distinctes.

Il n'y a pas lieu, d'une façon générale, de calculer les points de la courbe j; dans tous les cas, une détermination approchée suffira. On prendra alors $\beta = 0$, et en négligeant la réfraction et l'aplatissement, la condition

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leqslant u_1^2$$

qui définit la partie utile de la courbe j, deviendra

$$\cos(\gamma - M) \geqslant \frac{1 + m^2 - u_1^2}{2m};$$

γ pourra être choisi arbitrairement entre les deux limites ainsi déterminées, qui correspondent aux deux points limites H_1 situés aussi sur la courbe h.

En un point de la courbe j, et en particulier aux deux points limites H_1, la direction MC qui définit la phase de l'éclipse est observée dans l'horizon : nous avons vu que ce sera au lever du Soleil, ou bien à son coucher, suivant que $\sin\gamma$ sera négatif ou positif. Il peut cependant y avoir incertitude si cette quantité est fort petite; mais, dans ce cas, $\sin\beta$ étant lui-même très petit, les formules qui relient β, γ à L, φ montrent que l'on a très sensiblement

$$\sin\varphi = \pm\cos D,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi| = \frac{\pi}{2} - |D|;$$

la latitude est donc grande en valeur absolue, et il n'y a aucun intérêt à déterminer avec précision les circonstances de l'éclipse en un tel point.

Pour nous rendre compte cependant de la nature des phénomènes, négligeons entièrement la réfraction, l'aplatissement et l'angle f, et examinons ce qui arrive quand on a simultanément $\beta = 0$, $\sin\gamma = 0$. Il faut distinguer quatre cas :

1° $\gamma = 0$, $D > 0$; il en résulte $H - L = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - D$:

le point correspondant est situé sur le parallèle de jour perpétuel, c'est-à-dire celui qui limite la zone terrestre où le

Soleil ne se couche pas ; l'éclipse est observée à minuit vrai local, au moment où le Soleil (qui est supposé réduit à son centre) vient raser l'horizon, sans descendre au-dessous.

2° $\gamma = \pi$, $D < o$; d'où $H - L = \pi$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} - D$;

les conclusions sont les mêmes.

3° $\gamma = o$, $D < o$; d'où $H - L = o$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + D$;

le point est alors situé sur le parallèle symétrique de nuit perpétuelle, et l'éclipse est observée à midi vrai local, au moment où le Soleil vient raser l'horizon, sans s'élever au-dessus.

4° $\gamma = \pi$, $D > o$; d'où $H - L = o$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} + D$;

les conclusions sont les mêmes que dans le cas précédent.

Il en sera à peu près de même dans la réalité, quand on tient compte des quantités d'abord négligées, et nous conviendrons de regarder les points H'' de la courbe j pour lesquels $\gamma = o$ ou $\gamma = \pi$, comme les points où le lever et le coucher du Soleil sont confondus, c'est-à-dire encore comme les points de transition entre ceux qui observent l'éclipse au lever du Soleil, et ceux qui l'observent au coucher.

Les points H'' ainsi définis sont déterminés par les équations exactes

$$\begin{cases} k \sin(\gamma - N) = \mu - uq \sin(Q' - N), \\ k \cos(\gamma - N) = n(t - t_0) - uq \cos(Q' - N), \\ \qquad \beta = -R_0 - f \cos(\gamma - Q'), \end{cases}$$

en faisant $\gamma = o$ ou $\gamma = \pi$, de sorte que les inconnues, si t est donné, sont Q', β et la grandeur q qui figure dans les expressions de u et de f.

Les points H'' situés sur les courbes j limitées à leurs parties utiles, ont pour lieu géométrique une courbe J, qui est très voisine du parallèle de jour perpétuel ou du parallèle de nuit perpétuelle, et que l'on peut regarder par suite comme l'enveloppe des courbes j, d'une façon suffisamment approchée. On peut définir la courbe J par les équations précédentes, où t et Q' seront les inconnues, tandis que u sera un paramètre

variable, et il est clair alors que ce paramètre devra être au plus égal à u_1 en valeur absolue. Si donc la courbe J existe, elle sera limitée aux points H' qui sont en même temps des points H_1, et que nous appellerons H_1''. Pour déterminer ces points, on fera usage des équations

$$\begin{cases} u_1 q \sin(Q' - N) = \mu - k \sin(\gamma - N), \\ n(t - t_0) = k \cos(\gamma - N) + u_1 q \cos(Q' - N), \\ \beta = -R_0 - f_1 \cos(\gamma - Q'), \end{cases}$$

avec $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$, les inconnues étant t et Q' : la variation de γ et Q' le long de la courbe L montrera suffisamment les valeurs approchées de t et de Q' qui doivent servir de point de départ pour la résolution exacte de ces équations.

On voit sans peine qu'il faut prendre $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$ suivant que l'on a $\mu < 0$ ou $\mu > 0$, et l'on trouve alors deux points H_1'', sous la condition très approchée que la valeur absolue de μ soit comprise entre $\sin N + u_1$ et $\sin N - u_1$; la courbe J est voisine du parallèle de jour perpétuel ou de nuit perpétuelle suivant que le produit μD est négatif ou positif; elle se raccorde tangentiellement avec la courbe L en ses extrémités.

En un point quelconque de la courbe h, et en particulier aux deux points limites H_1, on voit l'éclipse commencer ou finir à l'époque correspondante t; il est facile de distinguer entre ces deux cas, en faisant usage de la relation (j) ou plus simplement (j') : l'éclipse commence ou finit suivant que la dérivée g' de la grandeur g, ici égale à zéro, est positive ou négative, c'est-à-dire suivant que l'on a

$$(A - \sin\beta)\sin Q' - B\cos Q' \lesseqgtr 0.$$

Il peut exister des points H' tels que le premier membre de l'inégalité précédente soit nul : alors l'éclipse finit en même temps qu'elle commence, c'est-à-dire que les disques du Soleil et de la Lune ne font que s'effleurer, sans que l'un vienne mordre sur l'autre.

Si l'angle Q', pris entre $-\pi$ et $+\pi$, est alors aigu en valeur absolue, le point H' appartient à la limite australe A de l'éclipse; dans le cas contraire, il fait partie de la limite bo-

réale B : des raisons déjà indiquées justifient ces dénominations, en général.

Pour déterminer avec une exactitude suffisante les points H' quand ils existent, il faut résoudre les équations simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\beta \sin(\gamma - M) = -l_1 q \sin(Q' - M), \\ \cos\beta \cos(\gamma - M) = m - l_1 q \cos(Q' - M), \\ l_1 = u_1 - \sin\beta \operatorname{tg} f_1, \\ (A - \sin\beta)\sin Q' - B\cos Q' = 0; \end{array}\right.$$

il n'y a pas lieu d'écrire plus exactement la condition $g' = 0$, car, ici encore, une grande précision dans la détermination de l'angle Q' est inutile.

Sous le bénéfice de cette remarque, on déterminera l'angle Q' par l'équation

$$\operatorname{tg} Q' = \frac{B}{A - \sqrt{1 - m^2 - u_1^2 + 2 m u_1 \cos(Q' - M)}},$$

en prenant pour $\sin\beta$ une valeur approchée déjà indiquée précédemment.

Cette équation sera résolue elle-même par approximations successives rapidement convergentes, puisqu'il serait illusoire de chercher une solution exacte ; pour diriger ces approximations, on partira d'une valeur approchée de Q' dont la tangente soit comprise entre $\frac{B}{A}$ et $\frac{B}{A-1}$; c'est-à-dire que si l'on fait

$$\operatorname{tg} F' = \frac{B}{A-1},$$

on prendra Q' compris entre F et F', ou bien $\pi + F$ et $\pi + F'$.

Le lieu géométrique des points H' se composera des deux courbes A et B, si elles existent simultanément ; de l'une d'elles seulement, dans le cas contraire. Comme dans le cas de l'éclipse centrale, les lignes A, B sont l'enveloppe des parties utiles des courbes *h*.

Les lignes A, B se terminent lorsque le point H' est en même temps un point H_1 de la courbe L, et se raccordent alors tangentiellement avec cette courbe ; pour un tel point, que nous appellerons H_1', la Lune et le Soleil ne font que s'effleurer, le point de contact apparaissant dans l'horizon. Les

points H_1' vérifieront, avec une exactitude tout à fait suffisante, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} k \sin(\gamma - N) = \mu - u_1 q \sin(Q' - N), \\ n(t - t_0) = k \cos(\gamma - N) + u_1 q \cos(Q' - N), \\ \beta = -R_0 - f_1 \cos(\gamma - Q'), \end{array}\right.$$

l'angle Q' étant pris égal à F ou à $F + \pi$, suivant que le point H_1' appartient à la limite A ou à la limite B. Ici encore, la variation de l'angle Q' le long de la courbe L montrera suffisamment les valeurs approchées de t qu'il conviendra d'employer pour résoudre ces équations.

En remarquant que $\sin(N - F)$ reste très voisin de l'unité, d'après des formules établies à la fin de l'avant-dernier paragraphe, on voit facilement que 1° si les contacts intérieurs du cône K existent, les deux limites A et B existent simultanément; 2° si les contacts intérieurs n'existent pas, il y a seulement une limite australe ou une limite boréale suivant que μ est négatif ou positif. Ces résultats ne paraissent qu'approchés : mais ils sont entièrement exacts (en acceptant les simplifications faites pour exposer la théorie analytique), ainsi qu'on le voit en remarquant que les équations précédentes sont effectivement vérifiées par des contacts confondus, extérieurs ou intérieurs.

Une circonstance exceptionnelle intéressante peut encore se présenter, si un point H_1' est confondu avec un point H_1'', ce qui exige à la fois

$$\sin\gamma = 0, \qquad \sin(Q' - F) = 0.$$

Faisant $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha = \pm 1$, posons alors

$$\cos\gamma = \varepsilon, \qquad \cos(Q' - F) = \alpha;$$

il faut vérifier les deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha u_1 \sin(F - N) = \mu + \varepsilon \sin N, \\ \alpha u_1 \cos(F - N) = n(t - t_0) - \varepsilon \cos N. \end{array}\right.$$

Or on a

$$\cot g\,(F - N) = -\frac{nH' \sin D}{n - \mu H' \sin D}(t - t_0),$$

et par suite

$$\alpha u_1 \cos(\mathrm{F}-\mathrm{N}) = -\frac{n-\mu \mathrm{H}' \sin \mathrm{D}}{\mathrm{H}' \sin \mathrm{D}} \operatorname{cotg}(\mathrm{F}-\mathrm{N}) - \varepsilon \cos \mathrm{N};$$

remplaçant alors cotg (F — N) par $\alpha u_1 \dfrac{\cos(\mathrm{F}-\mathrm{N})}{\mu+\varepsilon \sin \mathrm{N}}$, on a encore

$$\alpha u_1 \cos(\mathrm{F}-\mathrm{N}) = -\frac{\varepsilon \mathrm{H}' \sin \mathrm{D} \cos \mathrm{N}(\mu+\varepsilon \sin \mathrm{N})}{n+\varepsilon \mathrm{H}' \sin \mathrm{D} \sin \mathrm{N}},$$

ou bien

$$\alpha u_1 \cos(\mathrm{F}-\mathrm{N}) = (\mu+\varepsilon \sin \mathrm{N}) \operatorname{tg} \chi,$$

en faisant

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{-\varepsilon \mathrm{H}' \sin \mathrm{D} \cos \mathrm{N}}{n+\varepsilon \mathrm{H}' \sin \mathrm{D} \sin \mathrm{N}}.$$

La condition de possibilité, pour la question posée, est donc

$$u_1^2 \cos^2 \chi = (\mu+\varepsilon \sin \mathrm{N})^2.$$

On peut prendre l'angle χ voisin de zéro, de façon que $\cos \chi$ soit positif; nous avons vu de plus, à propos des points H_1'', que l'on avait $\mu\varepsilon < 0$, nécessairement; si donc μ est positif, cette condition devient

$$\mu = \sin \mathrm{N} \pm u_1 \cos \chi.$$

Si μ est négatif, on a de même

$$|\mu| = \sin \mathrm{N} \pm u_1 \cos \chi,$$

mais l'angle χ n'est pas le même que le précédent.

Il est facile de vérifier que l'on a toujours

$$1-u_1 > \sin \mathrm{N} - u_1 \cos \chi \qquad \text{ou} \qquad \frac{1-\cos \chi}{1-\sin \mathrm{N}} < \frac{1}{u_1};$$

en effet l'angle χ est petit et $1-\cos \chi$ peut être pris égal à $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \chi$; l'inégalité à démontrer prend donc la forme évidente

$$\frac{\mathrm{H}'^2 \sin^2 \mathrm{D}(1+\sin \mathrm{N})}{2(n+\varepsilon \mathrm{H}' \sin \mathrm{D} \sin \mathrm{N})^2} < \frac{1}{u_1}.$$

Quand un point H_1' est confondu avec un point H_1'', les formules établies ci-dessus montrent que sur la courbe L, les dérivées correspondantes $\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\dfrac{d\mathrm{L}}{dt}$ sont toutes deux nulles, et

réciproquement : il en résulte que le point en question sera un rebroussement pour la ligne L. Comme un point de rebroussement est la limite d'un point double, on peut faire l'induction conforme à l'expérience que la ligne L présentera un point double, correspondant à deux valeurs distinctes du temps t, lorsque μ sera compris entre les limites qui correspondent aux rebroussements. Ce point double, que l'on peut qualifier d'habituel, est d'une espèce toute à fait différente de celle du point double exceptionnel que l'on rencontre quand les deux contacts intérieurs sont confondus, puisque ce dernier correspond à une seule valeur de t. Lorsque le point double habituel existe, il est tout à fait inutile de chercher à le déterminer exactement : il sera mis suffisamment en évidence par la succession même des points calculés de la ligne L, lorsqu'on les reporte sur une carte.

Les développements qui précèdent nous mettent en mesure de déterminer les différentes régions de la Terre qui peuvent voir soit l'éclipse entière, soit une partie seulement de l'éclipse, et aussi de classer et caractériser les divers cas qui peuvent se présenter.

Il est manifeste d'abord que les régions qui peuvent observer l'éclipse sont délimitées 1° par la courbe L, lieu des points limites H_1 ; 2° par la courbe J, lieu des points H'', et enveloppe utile des courbes j ; 3° par la ou les courbes A, B, lieu des points H', et enveloppe utile des courbes h.

Voici d'autre part les différents cas qui peuvent se présenter, en supposant μ positif.

1° On a $1 + u_1 > \mu > \sin N + u_1$.

La courbe L est une courbe fermée sans point double ; il n'y a pas de courbe J ; il existe une limite boréale B.

2° On a $\sin N + u_1 > \mu > \sin N + u_1 \cos \chi$.

La courbe L est comme ci-dessus ; J et B existent, J étant dans le voisinage du pôle Sud, ainsi que dans les cas suivants.

3° On a $\sin N + u_1 \cos \chi > \mu > 1 - u_1$.

La courbe L est maintenant une courbe fermée avec point double ; J et B existent.

4° On a $1 - u_1 > \mu > \sin N - u_1 \cos \chi$.

La courbe L se compose de deux courbes fermées, dont

l'une a un point double et se raccorde avec J en ses extrémités ; les deux limites A et B existent, se raccordant avec chacune des parties de L en une extrémité.

5° On a $\sin N - u_1 \cos \chi > \mu > \sin N - u_1$.

Tout se passe comme dans le cas précédent, sauf que la courbe L n'a plus de point double.

6° On a $\mu < \sin N - u_1$.

La courbe J disparaît à son tour.

L'étude des cas de transition serait immédiate.

On ferait de même si μ était négatif.

D'après les indications générales que nous avons développées, il sera facile, dans chaque cas particulier, de dresser la carte de l'éclipse et de caractériser chacune des régions que déterminent les courbes L, J, A, B, ainsi que leurs limites.

Voici, comme exemples, les dispositions que l'on rencontre le plus fréquemment. Dans la figure 76, P est le pôle Nord ; la courbe L a un point double en D ; elle se raccorde en E, E′ avec J, ou parallèle de jour perpétuel ; en F, F′ avec la limite australe A. Q est le premier contact extérieur, Q′ le dernier ; la marche générale de l'éclipse est de l'Ouest vers l'Est, de Q vers Q′.

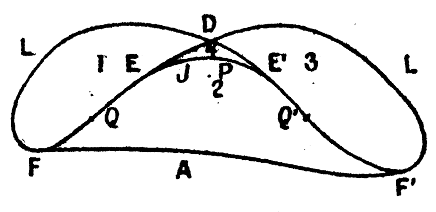


Fig. 76

Sur l'arc FQE, on voit le commencement de l'éclipse au lever du Soleil ; sur l'arc EDF′, on voit le commencement au coucher ; sur l'arc F′Q′E′, la fin au coucher ; sur l'arc E′DF, la fin au lever. Sur la limite australe A, on voit la Lune raser simplement le Soleil ; sur la courbe J, c'est-à-dire l'arc EE′, on voit le Soleil éclipsé raser l'horizon.

Dans la région 1, on voit la fin de l'éclipse, mais non le commencement ; dans la région 3, on voit le commencement, mais non la fin. Dans la région 2, on voit l'éclipse entière ; dans la région 4, on voit le commencement et la fin de l'éclipse, mais on ne voit pas toute l'éclipse, car la nuit a lieu entre le commencement et la fin. Au point double D, on voit l'éclipse commencer au coucher du Soleil, et finir à son lever.

Dans la figure 77, les choses se passent à peu près de la même façon, P étant toujours le pôle Nord; mais EE′ ou J est le parallèle de nuit perpétuelle; sur l'arc FDE′, on voit le commencement de l'éclipse au lever du Soleil; sur E′F′, le commencement au coucher; sur F′DE, la fin au coucher; sur EF, la fin au lever.

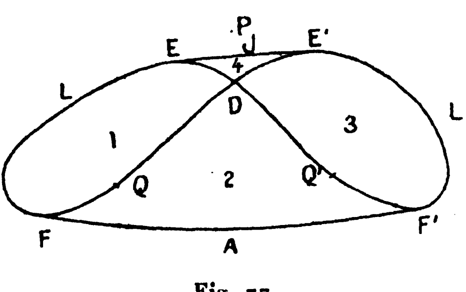


Fig. 77.

Les régions 1, 2, 3 sont caractérisées comme plus haut; dans la région 4, on ne voit ni le commencement ni la fin de l'éclipse, mais on en voit une partie, car le jour a lieu entre le commencement et la fin. Au point double D, on voit l'éclipse commencer au lever du Soleil et finir à son coucher.

On aurait des dispositions analogues en prenant pour P le pôle Sud.

Dans la figure 78, L se compose de deux courbes fermées

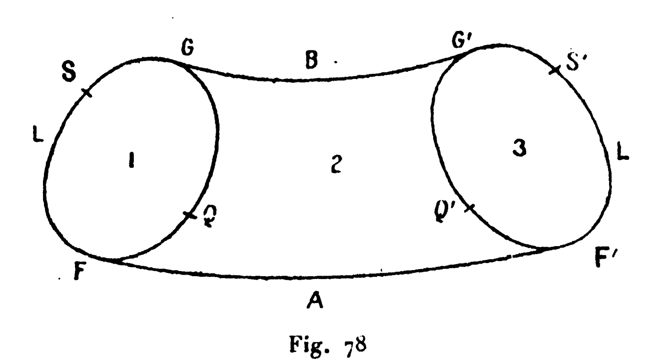


Fig. 78

sans point double; J n'existe pas, mais les deux limites A et B existent; S et S′ sont le premier et le dernier contact intérieur. Les régions 1, 2, 3 sont caractérisées comme plus haut.

Pour achever la carte de l'éclipse, il conviendra encore de tracer les courbes *h* qui correspondent aux heures rondes comprises entre le commencement et la fin de l'éclipse : on pourra ainsi, à la simple inspection de la carte, déterminer à quelques minutes près, les époques du commencement et de la fin de l'éclipse en un lieu donné.

Dans ce qui précède, nous avons déterminé les points de la Terre qui peuvent observer l'éclipse au moins partiellement, ou, en d'autres termes, qui peuvent observer une éclipse de grandeur supérieure à zéro. On déterminerait de la même façon les points qui peuvent observer une éclipse de grandeur au moins égale à g, le nombre g ayant une valeur donnée comprise entre o et 1 : il suffirait de remplacer partout les quantités u_1, f_1 par

$$u = u_1 - g(u_1 - u_2), \qquad f = f_1 - g(f_1 - f_2).$$

On trouverait des résultats tout semblables, et en particulier des limites A, B, dont les extrémités H_1' auraient pour lieu géométrique une courbe G que l'on trace aussi sur la carte : en chacun des points de cette courbe, on observe une phase maxima dans l'horizon, soit au lever, soit au coucher du Soleil, et il est facile, comme nous l'avons vu, de distinguer entre ces deux cas. On déterminera par exemple les points de cette courbe qui correspondent aux grandeurs o, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ (c'est déjà fait pour $g = 0$) : ce sera suffisant, en tenant compte des observations suivantes.

La transition entre les points de G qui observent la phase maxima au lever ou au coucher du Soleil aura lieu au point déterminé par les équations générales

$$\left\{\begin{aligned} k \sin(\gamma - N) &= \mu - uq \sin(Q' - N), \\ n(t - t_0) &= k \cos(\gamma - N) + uq \cos(Q' - N), \\ \beta &= -R_0 - f \cos(\gamma - Q'), \end{aligned}\right.$$

où l'on doit prendre $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$, $Q' = F$ ou $Q' = F + \pi$: les inconnues sont t et g ou u ; t est toujours assez voisin de t_0, et par suite la résolution exacte de ces équations est facile par approximations successives ; une grande précision est d'ailleurs inutile.

Ces équations sont celles mêmes qui expriment que la limite analogue à L relative à la grandeur g admet un point de rebroussement : le problème n'est donc possible que si la limite L déjà calculée a un point double habituel, et n'admet alors qu'une solution.

Si le cône K relatif à la grandeur g_0 a ses deux contacts

extérieurs confondus en un point G_0, il est clair qu'aucun autre point ne voit une éclipse de grandeur supérieure à g_0; par suite g_0 est la grandeur maxima de l'éclipse, qui est nécessairement partielle.

Le point G_0 et la grandeur g_0 sont définis par les équations suffisamment approchées

$$t = t_0, \quad \gamma = Q' = N \pm 90^\circ, \quad u_0 q = \pm \mu - k,$$
$$u_0 = u_1 - g_0(u_1 - u_2), \quad f_0 = f_1 - g_0(f_1 - f_2), \quad \beta = -R_0 - f_0,$$

le signe ambigu étant celui de μ.

Si le cône K relatif à la grandeur g_0' a ses deux contacts intérieurs confondus en un point G_0', ce point est défini de même par les conditions

$$t = t_0, \quad \gamma = Q' - 180^\circ = N \pm 90^\circ, \quad u_0' q = k \mp \mu,$$
$$u_0' = u_1 - g_0'(u_1 - u_2), \quad f_0' = f_1 - g_0'(f_1 - f_2), \quad \beta = -R_0 + f_0',$$

et l'éclipse est nécessairement centrale, la courbe L étant formée d'un seul trait.

En supposant $\mu > 0$, la limite australe A relative à la grandeur g_0' se réduit ici au point G_0', et par suite g_0' est la grandeur minima de l'éclipse du côté austral de la ligne de centralité.

Avec $\mu < 0$, il en serait de même, en remplaçant le mot austral par boréal.

Une dernière remarque est enfin nécessaire. Lorsque l'éclipse est centrale, la ligne G passe très près des extrémités de la ligne de centralité, mais présente alors une discontinuité : en effet, lorsque l'éclipse devient centrale, le point du bord de la Lune qui détermine la grandeur proprement dite de l'éclipse est indéterminé ; mais les positions de ce point immédiatement avant et après la centralité sont diamétralement opposées. Pour déterminer les extrémités distinctes des branches australes et boréales de la ligne G aux environs des points P_1, P_2 qui terminent la ligne de centralité, on a, puisque l'éclipse est centrale,

$$\begin{cases} k \sin(\gamma - N) = \mu, \\ n(t - t_0) = k \cos(\gamma - N), \\ \beta = -R_0 - f \cos(\gamma - Q'), \end{cases}$$

de sorte que γ et t ont les mêmes valeurs qu'en P_1, P_2; l'angle

Q′ est égal à F ou F + π, suivant qu'il s'agit d'une branche australe ou d'une branche boréale de G ; la grandeur est

$$\frac{u_1}{u_1 - u_2} = 1 + \frac{u_2}{u_1 - u_2},$$

et par suite

$$f = f_2 - \frac{u_2(f_1 - f_2)}{u_1 - u_2}.$$

Si l'éclipse est totale, les extrémités des limites australe ou boréale de l'éclipse totale sont manifestement situées sur les branches australes ou boréales de G ; mais si l'éclipse est annulaire, ces mêmes extrémités sont sur les prolongements des branches boréales ou australes de G.

Pour l'éclipse du 24 Janvier 1925, les calculs exécutés suivant les règles que nous venons d'exposer conduisent aux résultats suivants, qui, avec ceux déjà indiqués, permettent de dresser la carte complète de l'éclipse ; elle est du type de la figure 77 (Voir la planche ci-jointe).

	Courbe G				*Courbe A*		
	Milieu de l'Eclipse				Limite australe de l'Eclipse		
	t	L	φ	*g*	*t*	L	φ
Au lever du Soleil	13h.23m,9	+104°,7	+10°,9	0,000	13h.23m,9	+104°,7	+10°,9
	27,5	102, 7	18, 7	0,250	30	86, 2	4, 6
	33,9	100, 8	27, 1	0,500	40	75, 9	+ 1, 6
	44,1	98, 7	36, 5	0,750	14. 0	62, 9	— 1, 0
	14. 2,0	+ 94, 9	+ 48, 4	1,011	20	53, 1	1, 5
					40	44, 6	— 0, 6
	14. 2,0	+ 95, 5	+ 48, 7	1,011	15. 0	37, 0	+ 1, 4
	17,9	90, 3	57, 0	0,875	20	29, 5	4, 4
	53,5	64, 5	69, 9	0,765 (1)	40	21, 5	8, 2
					16. 0	11, 6	13, 4
	15. 8,5	44, 1	71, 5	0,784	10	+ 4, 6	16, 8
					16. 23,5	— 18, 1	+26, 2
Au coucher du Soleil	29,1	16, 4	68, 2	0,875			
	15.45,1	+ 1, 8	+ 62, 0	1,011			
	15.45,1	+ 2, 5	+ 61, 7	1,011			
	16. 3,0	— 7, 7	51, 0	0,750			
	13,2	12, 3	42, 0	0,500			
	19,6	15, 4	33, 9	0,250			
	16.23,5	— 18, 1	+ 26, 2	0,000			

(1) Minimum.

Courbe L

Commencement de l'Eclipse

	t	L	φ
Au lever du Soleil	$13^h.23^m,9$	$+104°,7$	$+10°,9$
	20	103, 9	10, 7
	10	101, 4	10, 8
	0	98, 5	12, 0
	12.50	95, 0	15, 0
	41,3(1)	89, 6	25, 0
	50	84, 6	38, 2
	13. 0	82, 5	45, 2
	10	80, 3	50, 8
	20	77, 5	55, 7
	30	73, 6	60, 1
	40	68, 1	64, 0
	50	60, 3	67, 3
	14. 0	49, 5	69, 8
	10	35, 7	71, 1
	13,5	30, 3	71, 2
Au coucher du Soleil	20	20, 4	70, 9
	30	+ 6, 4	68, 9
	40	− 4, 6	65, 6
	50	12, 3	61, 2
	15. 0	17, 5	56, 3
	10	20, 7	51, 1
	20	22, 6	46, 0
	30	23, 5	41, 2
	40	23, 6	36, 9
	50	23, 0	33, 2
	16. 0	22, 0	30, 2
	10	20, 6	28, 0
	20	18, 8	26, 5
	16.23,5	− 18, 1	+ 26, 2

Fin de l'Eclipse

	t	L	φ
	$13^h.23^m,9$	$+104°,7$	$+10°,9$
	30	106, 0	11, 6
	40	107, 8	13, 3
	50	109, 4	15, 8
Au lever du Soleil	14. 0	110, 6	19, 0
	10	111, 5	23, 0
	20	112, 0	27, 7
	30	112, 0	32, 8
	40	111, 6	38, 3
	50	110, 5	43, 9
	15. 0	108, 6	49, 5
	10	105, 7	54, 9
	20	101, 4	59, 8
	30	95, 2	64, 1
	40	86, 6	67, 6
	50	75, 4	70, 1
	16. 0	61, 8	71, 3
	2,9	57, 7	71, 3
	10	47, 7	71, 0
Au coucher du Soleil	20	35, 0	69, 3
	30	24, 7	66, 4
	40	16, 8	62, 5
	50	10, 6	57, 3
	17. 0	+ 5, 1	50, 1
	5,8(2)	− 0, 8	40, 0
	0	6, 7	31, 7
	16.50	10, 9	27, 9
	40	14, 0	26, 3
	30	16, 6	25, 9
	16.23,5	− 18, 1	+ 26, 2

(1) **Premier contact extérieur.**
(2) **Dernier contact extérieur.**

Courbes h

A 13 heures

	L	φ
L'éclipse commence	+ 82°,5	+ 45°,2
	68, 0	36, 8
	62, 6	30, 2
	59, 8	22, 3
	61, 6	13, 9
	68, 6	8, 7
	76, 8	7, 5
	84, 8	8, 2
	+ 98, 5	+ 12, 0

A 17 heures

	L	φ
L'éclipse finit	— 6°,7	+ 31°,7
	+ 4, 6	28, 9
	11, 6	28, 9
	17, 5	31, 8
	18, 9	37, 7
	15, 8	43, 5
	+ 5, 1	+ 50, 1

A 14 heures

	L	φ
L'éclipse commence	+ 49°,5	+ 69°,8
	39, 4	55, 6
	36, 7	48, 9
	34, 7	41, 4
	33, 4	27, 7
	34, 9	17, 3
	38, 6	9, 2
	44, 2	+ 3, 3
	51, 5	— 0, 3
	60, 4	1, 2
L'éclipse	62, 9	— 1, 0
L'éclipse finit	70, 7	+ 0, 8
	83, 3	6, 3
	90, 1	9, 8
	96, 4	13, 0
	+ 110, 6	+ 19, 0

A 15 heures

	L	φ
L'éclipse commence	— 17°,5	+ 56°,3
	— 2, 3	46, 9
	+ 3, 0	41, 0
	8, 9	32, 4
	14, 8	22, 6
	21, 2	13, 3
	28, 0	6, 4
	35, 4	2, 0
L'éclipse	37, 0	1, 4
L'éclipse finit	43, 3	0, 2
	51, 4	0, 9
	59, 2	4, 3
	66, 8	10, 3
	74, 3	18, 8
	81, 2	27, 9
	88, 0	35, 9
	93, 8	41, 3
	+ 108, 6	+ 49, 5

A 16 heures

	L	φ
L'éclipse comm^{ce}	— 22°,0	+ 30°,2
	— 7, 8	24, 0
	+ 3, 9	17, 5
L'éclipse	11, 6	13, 4
	14, 0	12, 2
L'éclipse finit	24, 8	8, 3
	33, 9	7, 7
	41, 9	10, 0
	48, 5	15, 0
	53, 6	22, 7
	57, 2	33, 5
	58, 9	44, 5
	59, 9	57, 2
	+ 61, 8	+ 71, 3

Condition d'existence des éclipses de Soleil. — Pour trouver d'une façon approchée la condition de possibilité d'une éclipse de Soleil, substituons l'emploi des coordonnées écliptiques à celui des coordonnées équatoriales, ce qui ne change rien aux raisonnements qui ont permis d'établir les formules (4); les axes Ox, Oy changent, mais leur plan reste le même.

Si λ, β sont la longitude et la latitude de la Lune, λ' la longi-

tude du Soleil, on a d'une façon suffisamment exacte

$$x = r\cos\beta\sin(\lambda - \lambda'), \qquad y = r\sin\beta\,;$$

et par suite, l'éclipse ne pouvant se produire que dans le voisinage d'une conjonction de la Lune et du Soleil, la latitude β étant petite en valeur absolue, on a aussi

$$x' = r\,\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}, \qquad y' = r\,\frac{d\beta}{dt}\,;$$

il en résulte, comme dans le cas des éclipses de Lune, que le minimum de $x^2 + y^2$, c'est-à-dire μ^2, se produit très près du moment même de la conjonction, et est sensiblement égal à $r^2\sin^2\beta$. On peut donc prendre

$$|\mu| = \frac{i}{\sin\varpi}\,|\sin(\lambda_0' - \Omega)|\,,$$

en désignant toujours par i et Ω l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, par λ'_0 la longitude du Soleil et de la Lune au moment de la conjonction, par ϖ la parallaxe lunaire correspondante.

D'autre part, on a sensiblement

$$u_1 = R\left(1 + \frac{s'}{s}\right) = \frac{1}{\sin\varpi}\,(s + s')\,;$$

la condition d'existence de l'éclipse, soit $|\mu| < 1 + u_1$, devient donc d'une façon suffisamment approchée pour permettre de prévoir les phénomènes,

$$i\,|\sin(\lambda_0' - \Omega)| < \varpi + s + s'\,;$$

de sorte que la distance du Soleil à l'un des nœuds de l'orbite lunaire doit être inférieure à 17° environ, au moment de la conjonction.

On étudierait de même la condition d'une éclipse centrale.

Le Soleil passant par les nœuds de l'orbite lunaire vers le 3 Février et le 28 Juillet de l'année 1925, on voit qu'il y aura éclipse de Soleil, et même éclipse centrale, aux deux conjonctions voisines de ces dates, le 24 Janvier et le 20 Juillet.

Période des éclipses de Lune et de Soleil. — Il est clair, d'après ce que nous venons de dire et ce que nous avons déjà

vu à propos des éclipses de Lune, que si l'on fait abstraction des petites irrégularités du mouvement de la Lune, les éclipses, tant de Soleil que de Lune, se reproduiront dans le même ordre dès que le Soleil, la Lune, et le nœud ascendant de l'orbite lunaire reprendront la même position relative. Or, la durée de la révolution synodique de la Lune vaut $29^j,5306$, tandis que sa révolution draconitique vaut $27^j,2122$. La réduction du rapport de ces deux temps en fraction continue montre que l'on a avec une très grande exactitude

242 révolutions draconitiques
223 révolutions synodiques } $= 6\,585^j,3 =$ 18 années juliennes 11 j. :

c'est la période chaldéenne des éclipses, ou *saros*, connue dès la plus haute antiquité.

D'autre part, on constate encore que 239 révolutions anomalistiques de la Lune valent précisément $6\,585^j,5$: il en résulte qu'au bout d'une période de 18 ans 11 jours, les éclipses se reproduiront non seulement dans le même ordre, mais aussi dans les mêmes conditions, puisque la distance de la Terre à la Lune reprend les mêmes valeurs : ces résultats ne sauraient d'ailleurs être entièrement rigoureux, mais seulement très approchés.

Remarquons aussi que la révolution synodique du nœud est de $346^j,6$, de sorte que les *saisons* des éclipses se succèdent de 173 jours en 173 jours, en moyenne ; le saros vaut 19 révolutions synodiques du nœud.

Dans la période de 18 ans 11 jours qui commence avec l'année 1925, on comptera 42 éclipses de Soleil, dont 14 totales, 13 annulaires, 2 annulaires totales, 13 partielles, et 27 éclipses de Lune dont 15 totales et 12 partielles. Ces chiffres restent les mêmes, avec de petites variations, pendant les périodes précédentes et suivantes.

Dans une même année, il y a au plus 7 éclipses, savoir 5 ou 4 de Soleil et 2 ou 3 de Lune ; il y a au moins 2 éclipses, et quand il n'y en a que 2, ce sont des éclipses de Soleil.

CHAPITRE XVIII

OCCULTATIONS D'ÉTOILES PAR LA LUNE

Théorie générale et application. — La théorie de l'occultation d'une étoile par la Lune est identique à celle d'une éclipse de Soleil, mais plus simple. L'étoile remplace le Soleil, et nous garderons toutes les notations du Chapitre précédent, en indiquant successivement toutes les modifications qu'il convient d'introduire.

La distance r' est infinie, et R' ayant une valeur finie, les angles ϖ' et s' sont nuls.

La direction Oz est par suite celle même de l'étoile, de sorte que l'on a exactement $a = \alpha'$, $d = \delta'$; l'angle horaire H varie d'une façon uniforme, et sa variation est celle du temps sidéral.

Il n'y a pas lieu de parler de phase, car les seuls phénomènes observables sont l'*immersion* de l'étoile et son *émersion*, c'est-à-dire le commencement et la fin de l'occultation. La condition pour que du point M on voie l'un de ces phénomènes au temps t, est évidemment que ce point soit situé sur le cylindre circonscrit à la Lune parallèlement à Oz ; en d'autres termes, on doit avoir

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

c'est-à-dire que la quantité l du Chapitre précédent doit toujours être prise égale au rayon linéaire R de la Lune.

En faisant encore

$$x - \xi = R \sin Q, \qquad y - \eta = R \cos Q,$$

l'angle de position de l'étoile par rapport au centre de la Lune,

compté toujours dans le sens des coordonnées horaires, est égal à $\pi + Q$; si, en effet, on marque le point L où la direction ML rencontre la sphère céleste de centre M, ainsi que les points z et P qui correspondent aux directions de l'étoile et du pôle (*fig.* 79), l'angle PzL est l'angle Q, et par suite, L étant voisin de z, l'angle PLz est égal à $\pi + Q$.

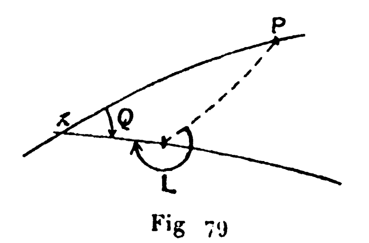


Fig 79

Pour permettre le calcul d'une occultation, il faut en donner les éléments : voici ceux que l'on trouve dans les éphémérides[1], et qu'il est d'ailleurs toujours facile de calculer directement.

Ayant déterminé les coordonnées apparentes α', δ' de l'étoile pour un instant voisin de l'occultation, on prend comme origine du temps l'époque T_0, exprimée en temps moyen de Greenwich, de la conjonction géocentrique en ascension droite de l'étoile et du centre de la Lune, et l'on donne la valeur correspondante H_0 de l'angle horaire.

Pour l'époque T_0, la valeur de x est nulle ; la valeur de y, soit y_0, est égale à $\frac{\sin(\delta_0 - \delta')}{\sin \varpi_0}$, en appelant δ_0 et ϖ_0 la déclinaison et la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune au même instant.

On peut considérer, avec une approximation suffisante, les dérivées x' et y' de x et y comme constantes pendant toute la durée du phénomène, et pour les obtenir, il suffit de les calculer pour l'époque T_0, ce qui donne immédiatement les formules

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\cos\delta_0}{\sin\varpi_0}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0, \\ y' &= \frac{\cos(\delta_0 - \delta')}{\sin\varpi_0}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0 - \sin(\delta_0 - \delta')\frac{\cos\varpi_0}{\sin^2\varpi_0}\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)_0, \end{aligned}\right.$$

où $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)_0$ sont les dérivées de α, δ, ϖ par rapport au temps à l'époque T_0, l'unité étant l'heure de temps moyen ;

(1) Dans le *Nautical Almanac* et l'*American Ephemeris* ; la *Connaissance des Temps* n'en donne qu'une partie.

ces données se déduisent immédiatement des éphémérides de la Lune. Le dernier terme de l'expression de y' peut d'ailleurs être négligé sans inconvénient.

Connaissant T_0, H_0, y_0, x', y', on aura pour une époque quelconque t comptée en heures à partir de T_0,

$$x = x't, \quad y = y_0 + y't, \quad H = H_0 + H't,$$

et l'on a ainsi tout ce qui est nécessaire pour le calcul, en ajoutant que

$$H' = 15^\circ 2'5, \quad \log H' = \bar{1},4192, \quad \log R = \bar{1},4350,$$

et rappelant que

$$\begin{cases} \xi = \cos\psi \sin(H - L), \\ \eta = (1 - \alpha)\cos\delta' \sin\psi - \sin\delta' \cos\psi \cos(H - L), \\ \xi' = H' \cos\psi \cos(H - L), \\ \eta' = H'\xi \sin\delta'. \end{cases}$$

Le calcul des époques de l'immersion et de l'émersion pour un lieu donné est alors identique à celui du commencement et de la fin d'une éclipse de Soleil, en remplaçant l_0 par R.

Comme application, prenons l'occultation de α Taureau (Aldébaran), le 13 Février 1924, en un lieu dont la latitude et la longitude sont

$$\varphi = 35^\circ 47',0 \quad L = 5^h 14^m,5,$$

de sorte que

$$\log\cos\psi = \bar{1},9096, \quad \log[(1 - \alpha)\sin\psi] = \bar{1},7645.$$

L'éphéméride fournit les valeurs

$$T_0 = 16^h 15^m,2 \text{ (temps moyen astronomique)},$$
$$H_0 = 9^h 15^m,2, \quad \delta' = 16^\circ 21',3, \quad y_0 = 0,2533,$$
$$x' = 0,5394, \quad y' = 0,0878;$$

et par suite, un premier calcul sommaire montre que l'immersion et l'émersion se produiront aux environs des époques $T_0 + 1^h$, $T_0 + 2^h$.

Prenant alors en premier lieu $T_0 + 1^h$ pour origine du temps, on a

$$x = 0,5394, \quad y = 0,3411,$$
$$\xi = 0,7852, \quad \eta = 0,4997,$$
$$\xi' = 0,0544, \quad \eta' = 0,0581,$$

et l'on trouve $t = 0,0476$ pour l'immersion, de sorte que celle ci a lieu à $17^h 18^m,1$; l'angle de position correspondant $\pi + Q$ est égal à $54°,8$.

De même, prenant ensuite $T_0 + 2^h$ pour origine du temps,

$$x = 1,0788, \qquad y = 0,4289,$$
$$\xi = 0,8121, \qquad \eta = 0,5590,$$
$$\xi' = -0,0010, \qquad \eta' = 0,0600,$$

de sorte que $t = -0,0521$ pour l'émersion : celle-ci a donc lieu à $18^h 12^m,1$ et l'angle de position correspondant vaut $298°,9$.

Il faut observer avec soin que ces calculs ne peuvent servir qu'à préparer les observations, car les données de l'éphéméride ne sont pas extrêmement précises, et l'on néglige les variations de x', y'. Si l'on voulait comparer la théorie à une observation faite dans de bonnes conditions, il faudrait calculer les positions apparentes exactes de la Lune et de l'étoile pour le lieu et l'heure de cette observation.

Il peut se faire que dans le calcul de la première approximation on ne trouve pas de valeur réelle pour l'angle $Q - N$, c'est-à dire que l'on a $| m \sin (M - N) | > R$. Cette circonstance indique ou bien une occultation d'une très courte durée, qu'une seconde approximation peut seule déterminer ; ou bien un *appulse*, c'est-à-dire que l'étoile passe très près du bord de la Lune sans être occultée. Dans ce dernier cas, la formule

$$t = -\frac{m}{n} \cos (M - N)$$

donne l'époque de la plus courte distance de l'étoile au centre de la Lune, et l'angle de position de cette plus courte distance est $N \mp \frac{\pi}{2}$, suivant que $m \sin (M - N)$ est une quantité positive ou négative.

La prédiction générale de l'occultation sera en tout semblable à celle d'une éclipse de Soleil ; il faudra seulement faire $l_1 = R$. La condition d'existence de l'occultation sera

$$| y_0 \sin N | < 1 + R,$$

en faisant ici $\operatorname{tg} N = \frac{x'}{y'}$; on voit en effet immédiatement que le

minimum de la distance du centre de la Terre à l'axe du cylindre d'ombre est égal en valeur absolue à $y_0 \sin N$.

Limites en latitude. — Les occultations d'étoiles sont des phénomènes faciles à observer avec précision quand le calcul en a été fait à l'avance, et précieuses pour la détermination des positions de la Lune. Mais elles sont très nombreuses chaque année, et il est clair que si les éphémérides en fournissent les éléments, elles ne peuvent pas donner les cartes correspondantes comme pour les éclipses de Soleil : on ne peut donc pas savoir à l'avance, sans un calcul préparatoire, si une occulation est visible ou non dans un lieu donné : pour éviter cependant en grande partie des calculs inutiles, les éphémérides donnent, en même temps que les éléments de chaque occultation, les limites en latitude entre lesquelles elle est observable, c'est-à-dire les latitudes des parallèles extrêmes sur lesquels on peut la voir.

Voici comment on peut déterminer d'une façon suffisamment approchée, et par un calcul rapide, ces limites.

Pour définir l'ensemble des points qui voient le commencement ou la fin de l'occultation, à un instant quelconque t, il faut, en négligeant l'aplatissement terrestre, envisager l'ensemble des solutions communes aux équations

$$(x't - \xi)^2 + (y_0 + y't - \eta)^2 = R^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

avec la condition supplémentaire $\zeta > 0$; on a ensuite les coordonnées géographiques de ces points par les relations qui les lient à ξ, η, ζ, t, et en particulier la latitude par la formule

$$\sin \varphi = \eta \cos \delta' + \zeta \sin \delta'.$$

Faisons

$$x' = n \sin N, \quad y' = n \cos N\,;$$

en prenant $n > 0$, on aura aussi toujours $\sin N > 0$, d'après la nature de la question, et on peut même ajouter que N ne s'éloignera pas beaucoup de $90°$.

La première équation peut s'écrire alors

$$[nt - (\xi \sin N + \eta \cos N - y_0 \cos N)]^2 = R^2 - (\xi \cos N - \eta \sin N + y_0 \sin N)^2;$$

posons donc pour déterminer ξ, η, ζ les relations

$$\begin{aligned} -\xi \cos N + \eta \sin N &= \sin \chi, \\ \xi \sin N + \eta \cos N &= \cos \chi \cos \psi, \\ \zeta &= \cos \chi \sin \psi, \end{aligned}$$

en prenant ψ compris entre 0° et 180°, χ compris entre $-$ 90° et 90°; on a ainsi toutes les solutions de l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2 = 1,$$

jointe à la condition $\zeta > 0$; mais il faut encore, pour que t prenne des valeurs réelles,

$$| \sin \chi - y_0 \sin N | < R,$$

c'est-à-dire que d'abord il faut supposer, comme nous l'avons déjà dit, $| y_0 \sin N | < 1 + R$, pour l'existence de l'occultation, et qu'ensuite $\sin \chi$ est assujetti à varier seulement entre le plus grand des nombres -1 et $y_0 \sin N - R$ d'une part, et le plus petit des nombres $+1$ et $y_0 \sin N + R$ d'autre part.

Des relations précédentes, on déduit

$$\sin \varphi = \cos \delta' \sin N \sin \chi + \cos \delta' \cos N \cos \chi \cos \psi + \sin \delta' \cos \chi \sin \psi,$$

et cette formule définit, quand on y fait varier ψ et χ entre les limites indiquées, la latitude d'un point quelconque pouvant observer le commencement ou la fin de l'occultation.

Faisons encore

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \cos \delta' \sin N, \\ \sin \omega \sin \omega' &= \sin \delta', \\ \sin \omega \cos \omega' &= \cos \delta' \cos N, \end{aligned}$$

en prenant ω' entre 0° et 180°, ω entre $-$ 90° et 90°, de sorte que $\sin \omega$ a le signe de $\sin \delta'$ ou δ'; le calcul effectif de ω' est d'ailleurs inutile.

Il vient

$$\sin \varphi = \cos \omega \sin \chi + \sin \omega \cos \chi \cos (\psi - \omega');$$

supposant alors χ constant, la variation de $\sin \varphi$, c'est-à-dire de φ, lorsque ψ varie entre 0 et 180°, s'aperçoit immédiate-

ment et se résume ainsi :

1° $\delta' > 0$, $N < 90°$; $\sin\varphi$ a pour maximum $\sin(\chi + \omega)$, pour minimum $-\cos\delta'\cos(\chi + N)$;

2° $\delta' > 0$, $N > 90°$; $\sin\varphi$ a pour maximum $\sin(\chi + \omega)$, pour minimum $\cos\delta'\cos(\chi - N)$;

3° $\delta' < 0$, $N < 90°$; $\sin\varphi$ a pour minimum $\sin(\chi + \omega)$, pour maximum $\cos\delta'\cos(\chi - N)$;

4° $\delta' < 0$, $N > 90°$; $\sin\varphi$ a pour minimum $\sin(\chi + \omega)$, pour maximum $-\cos\delta'\cos(\chi + N)$.

Les limites entre lesquelles χ varie ayant été déterminées, on voit alors immédiatement quels seront dans chaque cas le plus grand maximum et le plus petit minimum de φ, c'est-à-dire quelles seront les limites de l'occultation en latitude.

Si $\chi + \omega$ peut devenir égal à 90° ou à $-90°$, la plus grande ou la plus petite valeur de φ est elle-même 90° ou $-90°$.

Si l'on peut avoir $\chi = -N$, ou $\chi = -(180° - N)$, le minimum de φ sera $-(90° - \delta')$, suivant que l'on est dans le premier ou le second cas; de même, dans le troisième et le quatrième cas, le maximum de φ sera $90° + \delta'$ si l'on peut avoir $\chi = N$ ou $\chi = 180° - N$. Dans tous les cas, cette limite inférieure ou supérieure correspond au parallèle qui limite la zone terrestre où l'étoile reste toujours invisible.

Appliquons ce qui précède à l'occultation qui nous a déjà servi d'exemple. On a $N = 80°,8$, $y_0 \sin N = 0,250$; et par suite χ varie entre $-1°,3$ et $+31°,5$; d'autre part $\omega = 18°,8$; il en résulte immédiatement que les limites en latitude sont $-10°$ et $51°$.

CHAPITRE XIX

PASSAGES DE MERCURE ET DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

Théorie du passage géocentrique. — Ces phénomènes sont encore identiques aux éclipses de Soleil : il suffit de remplacer la Lune par la planète. Mais, comme nous l'avons déjà dit, on doit profiter de la petitesse des parallaxes des deux astres pour simplifier la théorie.

Nous garderons aux lettres les mêmes significations que dans le cas des éclipses de Soleil, la planète V remplaçant la Lune L (*fig.* 80). Si P est le pôle, considérons le triangle PSV vu du centre de la Terre à l'époque t, et dans ce triangle faisons SV $= \sigma$, PSV $= \chi'$, PVS $= \pi - \chi$; l'angle χ', compté de PS vers SV dans le sens des coordonnées horaires, est l'angle de position de V par rapport à S, par suite aussi l'angle de position du point de contact du Soleil et de la planète, lorsque les disques de ces astres apparaissent tangents. L'angle χ est compté de même depuis VP jusqu'au prolongement de SV.

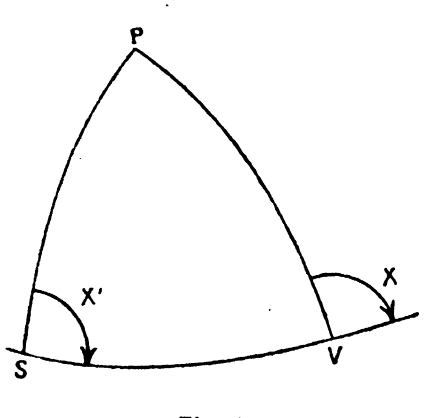


Fig. 80

On a, comme dans la théorie des éclipses de Lune,

$$\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\chi+\chi'}{2} = \cos\frac{\delta+\delta'}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2},$$

$$\sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\chi+\chi'}{2} = \sin\frac{\delta-\delta'}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2}.$$

Pendant la durée du passage, la distance σ reste petite, et il en est de même des différences $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$; si nous posons encore

$$\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \quad \delta_1 = \frac{\delta + \delta'}{2}, \quad Q = \frac{\chi + \chi'}{2},$$

nous ferons donc, sans erreur appréciable,

$$\begin{cases} x = \sigma \sin Q = (\alpha - \alpha') \cos \delta_1, \\ y = \sigma \cos Q = \delta - \delta', \end{cases}$$

et nous pourrons confondre Q avec l'angle de position χ', si du moins la distance σ n'est pas très petite.

Les quantités x, y varient d'une façon très sensiblement uniforme pendant la durée du passage; si donc on choisit une époque t_0 voisine de la conjonction du Soleil et de la planète, et que l'on appelle x_0, y_0, x_0', y_0' les valeurs correspondantes de x, y et de leurs dérivées, toujours faciles à calculer, on aura

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0), \quad y = y_0 + y_0'(t - t_0).$$

Si l'on pose alors

$$\begin{cases} x_0 = m \sin M, & x_0' = n \sin N, \\ y_0 = m \cos M, & y_0' = n \cos N, \end{cases}$$

il viendra, comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois,

$$\begin{cases} \sigma \sin (Q - N) = m \sin (M - N), \\ n(t - t_0) = - m \cos (M - N) + \sigma \cos (Q - N). \end{cases}$$

Si l'on se donne la distance σ, on obtiendra ainsi les époques t correspondantes, et les angles Q associés ; pour obtenir les éléments des contacts extérieurs ou intérieurs de la planète avec le Soleil, il faudra faire $\sigma = s' \pm s$, en désignant par s, s', comme nous l'avons dit, les demi-diamètres apparents géocentriques.

La plus courte distance des centres aura lieu sous la condition $\cos (Q - N) = 0$; si on la nomme σ_0, on aura

$$\sigma_0 = | m \sin (M - N) | ,$$

et $Q - N = \pm 90°$, suivant que $m \sin (M - N)$ est positif ou négatif.

Pour obtenir le maximum de précision, on prendra l'époque t_0 suffisamment voisine de celle du phénomène à déterminer.

Comme application, envisageons le passage de Mercure sur le Soleil, le 7 Mai 1924, le temps étant compté dans ce qui suit en temps moyen astronomique de Greenwich, à cette date.

Les tables du Soleil et de Mercure fournissent l'éphéméride précise suivante

t	α	δ	ϖ	s
9^h	44°.48'.47",7	17°. 4'.49",6	15",77	5",99
12	44. 50, 1	17. 1. 26, 9	78	99
15	40. 52, 3	16. 58. 3, 8	79	99
18	36. 54, 4	16. 54. 40, 3	80	99

t	α'	δ'	ϖ'	s'
9^h	44°.31',53",8	16°.55'. 3",9	8",72	15'50",56
12	39. 10, 2	16. 57. 7, 3	72	53
15	46. 26, 6	16. 59. 10, 4	72	51
18	53. 43, 2	17. 1. 13, 2	72	48

pour les coordonnées apparentes géocentriques, rapportées à l'équinoxe vrai de la date.

Par suite, l'unité de temps étant l'intervalle de 3 heures,

t	x	x'	y	y'
9^h	+ 969",6	— 644",30	+ 585",7	— 326",05
12	+ 325, 1	— 644, 65	+ 259, 6	15
15	— 319, 7	— 645, 00	— 66, 6	25
18	— 964, 9	— 645, 40	— 392, 9	35

Pour les premiers contacts, on partira de l'époque $t_0 = 9^h$, en faisant $s' + s = 956'',54$, $s' - s = 944'',56$; pour les derniers contacts, on partira de l'époque $t_0 = 18^h$, avec $s' + s = 956'',47$, $s' - s = 944'',49$; pour la plus courte distance des centres, on fera $t_0 = 13^h,5$, avec $x_0 = 2'',7$, $y_0 = 96'',5$, $x_0' = -644'',8$,

$y_0' = -326'',2$. On obtiendra de cette façon les éléments suivants :

Premier contact extérieur à	$9^h44^m4^s$,	$Q = 58°,1$;
Premier contact intérieur à	$9^h47^m4^s$,	$Q = 58°\,0$;
Plus courte distance des centres à	$13^h41^m27^s$,	$Q = 333°,2$, $\sigma_0 = 1'24'',9$;
Dernier contact intérieur à	$17^h35^m41^s$,	$Q = 248°,3$;
Dernier contact extérieur à	$17^h38^m41^s$,	$Q = 248°,3$.

Prédiction du passage en un lieu quelconque de la surface de la Terre. — Supposons maintenant que l'on observe le passage en un lieu M de la surface de la Terre, de latitude φ et de longitude L ; comme précédemment, φ' sera aussi la latitude géocentrique, ρ sera la distance au centre de la Terre, et si ψ est la latitude excentrique,

$$\rho \cos \varphi' = \cos \psi, \qquad \rho \sin \varphi' = (1 - \alpha) \sin \psi.$$

On peut suivre exactement la même méthode : les coordonnées α, α', δ, δ' deviendront $\alpha + d\alpha$, $\alpha' + d\alpha'$, $\delta + d\delta$, $\delta' + d\delta'$, en appelant $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\delta$, $d\delta'$ les corrections de parallaxe, et de même s et s' deviendront $s + ds$, $s' + ds'$: comme ces corrections sont très petites, nous pourrons les considérer comme des différentielles, et il en résultera pour x, y, x', y', des corrections analogues dx, dy, dx', dy'.

Envisageons les quantités $\alpha_1 = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$, $\delta_1 = \frac{\delta + \delta'}{2}$, et supposons qu'elles représentent les coordonnées d'un astre fictif, dont la parallaxe horizontale équatoriale serait ϖ_1, à l'époque correspondante t ; si θ est le temps sidéral à la même époque sur le méridien origine, les corrections de parallaxe relatives au lieu M sont d'après le Chapitre VIII, de la forme

$$\left\{\begin{aligned} d\alpha_1 &= -\varpi_1 b_1 \operatorname{s\acute{e}c} \delta_1, \\ d\delta_1 &= \varpi_1 (a_1 \sin \delta_1 - c_1 \cos \delta_1), \\ \frac{d\varpi_1}{\varpi_1} &= \varpi_1 (a_1 \cos \delta_1 + c_1 \sin \delta_1), \end{aligned}\right.$$

en faisant

$$a_1 = \rho \cos \varphi' \cos H_1, \qquad b_1 = \rho \cos \varphi' \sin H_1, \qquad c_1 = \rho \sin \varphi',$$

avec

$$H_1 = \theta - L - \alpha_1,$$

et si s_1 est le demi-diamètre apparent géocentrique de l'astre envisagé, on a aussi

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{d\varpi_1}{\varpi_1}.$$

Si donc on fait encore $\alpha_2 = \frac{\alpha - \alpha'}{2}$, $\delta_2 = \frac{\delta - \delta'}{2}$, de sorte que

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha' = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2, \quad \delta' = \delta_1 - \delta_2,$$

on aura avec une exactitude suffisante, en raison de la petitesse de α_2, δ_2, s, s',

$$d\alpha = -\varpi\left[b_1 \operatorname{séc}\delta_1 + \alpha_2 \frac{\partial(b_1 \operatorname{séc}\delta_1)}{\partial\alpha_1} + \delta_2 \frac{\partial(b_1 \operatorname{séc}\delta_1)}{\partial\delta_1}\right],$$

$$d\alpha' = -\varpi'\left[b_1 \operatorname{séc}\delta_1 - \alpha_2 \frac{\partial(b_1 \operatorname{séc}\delta_1)}{\partial\alpha_1} - \delta_2 \frac{\partial(b_1 \operatorname{séc}\delta_1)}{\partial\delta_1}\right],$$

$$d\delta = \varpi\Big[a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1)$$
$$+ \delta_2 \frac{\partial}{\partial\delta_1}(a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1)\Big],$$

$$d\delta' = \varpi'\Big[a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1 - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1)$$
$$- \delta_2 \frac{\partial}{\partial\delta_1}(a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1)\Big],$$

$$ds = s\varpi(a_1 \cos\delta_1 + c_1 \sin\delta_1), \quad ds' = s'\varpi'(a_1 \cos\delta_1 + c_1 \sin\delta_1).$$

En se reportant aux formules

$$\begin{cases} x = \sigma \sin Q = (\alpha - \alpha')\cos\delta_1, \\ y = \sigma \cos Q = \delta - \delta', \end{cases}$$

il en résulte sans peine, si l'on néglige le produit des parallaxes par le carré de σ,

$$\begin{cases} dx = -b_1(\varpi - \varpi') \\ \quad + \sigma \frac{\varpi + \varpi'}{2}(a_1 \cos\delta_1 \sin Q - b_1 \operatorname{tg}\delta_1 \cos Q + c_1 \sin\delta_1 \sin Q), \\ dy = (\varpi - \varpi')(a_1 \sin\delta_1 - c_1 \cos\delta_1) \\ \quad + \sigma \frac{\varpi + \varpi'}{2}(a_1 \cos\delta_1 \cos Q + b_1 \operatorname{tg}\delta_1 \sin Q + c_1 \sin\delta_1 \cos Q); \end{cases}$$

et aussi

$$\begin{cases} dx' = \frac{d}{dt}(dx) = -a_1\theta'(\varpi - \varpi'), \\ dy' = \frac{d}{dt}(dy) = -b_1\theta'(\varpi - \varpi')\sin\delta_1, \end{cases}$$

en appelant θ' la dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, égale à 0,7875 si l'unité de temps est 3 heures.

A l'époque t, on a exactement, pour le centre de la Terre,

$$x = \sigma \sin Q, \qquad y = \sigma \cos Q;$$

donc, à l'époque $t + dt$, et au lieu M, σ et Q devenant $\sigma + d\sigma$ et $Q + dQ$, on aura

$$dx + x'dt = d\sigma \sin Q + \sigma \cos Q\, dQ,$$
$$dy + y'dt = d\sigma \cos Q - \sigma \sin Q\, dQ;$$

d'où, en faisant

$$x' = n \sin N, \qquad y' = n \cos N,$$

et éliminant dQ dont le calcul est inutile,

$$\begin{aligned} n\cos(Q - N)\,dt &= d\sigma - dx \sin Q - dy \cos Q \\ &= d\sigma - \sigma \frac{\varpi + \varpi'}{2}(a_1 \cos\delta_1 + c_1 \sin\delta_1) \\ &\quad + (\varpi - \varpi')(-a_1 \sin\delta_1 \cos Q + b_1 \sin Q + c_1 \cos\delta_1 \cos Q). \end{aligned}$$

En faisant $\sigma = s' \pm s$, et $d\sigma = ds' \pm ds$, on aura ainsi, sous la forme $t + dt$, les heures des contacts extérieurs ou intérieurs, vus de M. Dans ces conditions, d'ailleurs,

$$d\sigma = (s'\varpi' \pm s\varpi)(a_1 \cos\delta_1 + c_1 \sin\delta_1),$$

et l'on a par suite la formule définitive

$$\begin{aligned} n\cos(Q - N)\,dt = (\varpi - \varpi')\Big[&-a_1\Big(\sin\delta_1 \cos Q + \frac{s' \mp s}{2}\cos\delta_1\Big) \\ &+ b_1 \sin Q + c_1\Big(\cos\delta_1 \cos Q - \frac{s' \mp s}{2}\sin\delta_1\Big)\Big], \end{aligned}$$

les signes supérieurs ou inférieurs convenant respectivement aux contacts extérieurs ou intérieurs.

La valeur de dt est linéaire par rapport aux quantités a_1, b_1, c_1 : ceci veut dire évidemment que le lieu géométrique des points M qui observent un même contact à une même époque, est une section plane de la surface terrestre, le plan de cette section se déplaçant parallèlement à lui-même quand le temps varie.

Il est avantageux de mettre l'expression de dt sous une

forme un peu différente. D'après les expressions de a_1, b_1, c_1, on peut écrire

$$dt = B \sin \psi + \cos \psi (A \cos H_1 + C \sin H_1),$$

sans qu'il soit utile de mettre en évidence les coefficients A, B, C; si l'on détermine alors P et ω par les relations

$$P \sin (\omega + \theta - \alpha_1) = C,$$
$$P \cos (\omega + \theta - \alpha_1) = A,$$

on aura plus simplement

$$dt = B \sin \psi + P \cos \psi \cos (L + \omega).$$

Le phénomène ne sera d'ailleurs observable que si la hauteur h de la planète au-dessus de l'horizon est positive : elle est donnée par la formule

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos (L + \alpha - \theta),$$

en négligeant la réfraction et la parallaxe.

Supposons maintenant que les éléments t, σ, ... correspondent à la plus courte distance des centres des deux astres, pour le centre de la Terre, tandis que $t + dt$, $\sigma + d\sigma$, ... correspondent à la plus courte distance observée en M. On a les conditions

$$\cos (Q - N) = 0, \qquad \cos (Q + dQ - N - dN) = 0,$$

de sorte que

$$dQ = dN = \frac{1}{n}(dx' \cos N - dy' \sin N) = \frac{\varepsilon}{n}(dx' \sin Q + dy' \cos Q),$$

en faisant $\varepsilon = \pm 1$, et $Q - N = \varepsilon \frac{\pi}{2}$.

Les équations

$$dx + x'dt = d\sigma \sin Q + \sigma \cos Q\, dQ,$$
$$dy + y'dt = d\sigma \cos Q - \sigma \sin Q\, dQ,$$

où dt et $d\sigma$ sont actuellement les inconnues, donnent alors

$$d\sigma = dx \sin Q + dy \cos Q,$$

d'où, avec une approximation suffisante,

$$d\sigma = (\varpi - \varpi')(a_1 \sin \delta_1 \cos Q - b_1 \sin Q - c_1 \cos \delta_1 \cos Q);$$

puis

$$\varepsilon n dt = dx \cos Q - dy \sin Q - \sigma\, dQ$$
$$= \left(dx - \frac{\varepsilon\sigma}{n} dy'\right) \cos Q - \left(dy + \frac{\varepsilon\sigma}{n} dx'\right) \sin Q,$$

et finalement

$$\varepsilon n dt = (\varpi - \varpi')\left[a_1 \sin Q\left(-\sin\delta_1 + \frac{\varepsilon\sigma\theta'}{n}\right)\right.$$
$$\left. + b_1 \cos Q\left(-1 + \frac{\varepsilon\sigma\theta'}{n}\sin\delta_1\right) + c_1 \cos\delta_1 \sin Q\right] - \sigma\frac{\varpi + \varpi'}{2} b_1 \operatorname{tg}\delta_1.$$

Les expressions de $d\sigma$ et dt seront transformées comme ci-dessus.

Appliquant ces résultats au passage de Mercure déjà envisagé, on obtiendra, en se servant de la valeur $3^h 0^m 12^s,0$ du temps sidéral à midi moyen, le 7 mai,

Premier contact extérieur

$$dt = -[1,727] \sin\psi - [1,961] \cos\psi \cos(L - 46^\circ 19').$$

Premier contact intérieur

$$dt = -[1,727] \sin\psi - [1,960] \cos\psi \cos(L - 47^\circ 2');$$
$$\sin h = [\bar{1},468] \sin\varphi + [\bar{1},980] \cos\varphi \cos(L - 147^\circ 3').$$

Plus courte distance des centres

$$d\sigma = -[0,779] \sin\psi - [0,567] \cos\psi \cos(L + 33^\circ 44'),$$
$$dt = -[1,658] \sin\psi + [1,965] \cos\psi \cos(L + 69^\circ 40');$$
$$\sin h = [\bar{1},466] \sin\varphi + [\bar{1},981] \cos\varphi \cos(L + 153^\circ 44').$$

Dernier contact intérieur

$$dt = -[1,573] \sin\psi + [1,997] \cos\psi \cos(L + 11^\circ 32').$$

Dernier contact extérieur

$$dt = -[1,575] \sin\psi + [1,997] \cos\psi \cos(L + 10^\circ 48');$$
$$\sin h = [\bar{1},464] \sin\varphi + [\bar{1},981] \cos\varphi \cos(L + 94^\circ 33').$$

Dans ces formules, les nombres sont représentés par leurs logarithmes placés entre crochets ; dt est exprimé en secondes de temps, $d\sigma$ en secondes d'arc.

Il serait facile de dresser une carte indiquant les diverses circonstances du passage pour les différents lieux de la Terre :

mais il serait superflu d'insister sur ce point, que nous avons longuement développé à propos des éclipses de Soleil.

Condition des passages. Leur période. — La condition évidente de la possibilité d'un passage est

$$|m \sin(M - N)| < s' + s.$$

Employons les coordonnées écliptiques, de sorte que la latitude β' est nulle ; prenons comme origine du temps le moment même de la conjonction en longitude, et soit β_0 la latitude de la planète à ce moment ; il en résulte

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = \beta_0,$$
$$x_0' = \cos\frac{\beta_0}{2}\left[\frac{d(\lambda - \lambda')}{dt}\right]_0, \qquad y_0' = \left[\frac{d\beta}{dt}\right]_0,$$

et la condition devient

$$|\beta_0 \sin N| < s' + s;$$

mais, pour des raisons déjà expliquées à propos des éclipses, l'angle N est voisin de 90° en valeur absolue, et en négligeant s, on peut prendre pour condition approchée

$$|\beta_0| < s'.$$

Appelons b la latitude héliocentrique de la planète, qui sera petite comme β_0 : r et r' étant toujours les distances géocentriques de la planète et du Soleil, la distance ρ du Soleil à la planète vaut très sensiblement $r' - r$, et l'on a l'égalité évidente

$$r \sin\beta_0 = \rho \sin b,$$

d'où

$$b = \beta_0 \frac{r' - \rho}{\rho}.$$

Il faut donc, pour que le passage ait lieu, avoir

$$|b| < s'\left(\frac{r'}{\rho} - 1\right),$$

au moins d'une façon approchée.

La planète sera par suite dans le voisinage de l'un de ses nœuds, et le Soleil aura une longitude voisine de celle du nœud ascendant ou descendant de la planète.

Pour Vénus, les passages auront donc lieu dans les environs du 8 Décembre (nœud ascendant) ou du 6 Juin (nœud descendant). Comme $\frac{r'}{\rho}$ est presque constant, à cause du peu d'excentricité des orbites de la Terre et de Vénus, ces deux circonstances offrent des chances égales. Les passages de Décembre ont pour dates, entre 1600 et 2100 : 1631, 1639, 1874, 1882 ; ceux de Juin : 1761, 1769, 2004, 2012.

Pour Mercure, les passages ont lieu vers le 9 Novembre (nœud ascendant) ou vers le 7 Mai (nœud descendant) ; mais la grandeur de l'excentricité de Mercure rend les passages de Mai moins fréquents : en effet, ρ est sensiblement plus petit au nœud ascendant qu'au nœud descendant, et la limite supérieure de $|\,b\,|$ est plus grande dans le premier cas que dans le second. Les passages de Novembre ont pour dates : ..... 1894, 1907, 1914, 1927, 1940, ... ; ceux de Mai : ..... 1891, 1924, 1937.....

Il est facile de vérifier et de préciser ces résultats, en observant que la planète et la Terre reprennent sensiblement les mêmes positions par rapport à la ligne des nœuds, c'est-à-dire dans le ciel, au bout d'un nombre d'années égal au numérateur d'une fraction rationnelle à peu près égale au rapport des révolutions sidérales de la planète et de la Terre. Pour Vénus, ce rapport est égal à $\frac{224,701}{365,2564}$; pour Mercure, il vaut $\frac{87,969}{365,2564}$. Le premier, réduit en fraction continue, fournit les fractions convergentes $\frac{8}{13}$, $\frac{235}{382}$, $\frac{243}{395}$, ... ; le second donne de même $\frac{6}{25}$, $\frac{7}{29}$, $\frac{13}{54}$, $\frac{33}{137}$, $\frac{46}{191}$, ... En examinant de plus près ces résultats, et la façon dont ces fractions et leurs intermédiaires approchent des rapports donnés, on verra que la période des passages de Vénus est de 243 ans, tandis que celle des passages de Mercure est de 46 ans. Dans une période de 243 ans, on a 4 passages de Vénus, aux époques t, $t + 8$, en Décembre, $t + 129,5$, $t + 137,5$, en Juin ; dans une période de 46 ans, on a 6 passages de Mercure, aux époques t, $t + 13$, $t + 26$, $t + 39$, en Novembre, $t + 9,5$, $t + 22,5$, en Mai.

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

—

DÉTERMINATION D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR TROIS OBSERVATIONS RAPPROCHÉES

Le mouvement d'une petite planète ou d'une comète M par rapport au Soleil peut être regardé, pendant un temps suffisamment court, quelques dizaines de jours par exemple, comme déterminé par la seule action du Soleil; et l'on peut supposer de plus le corps M et le Soleil O réduits à leurs centres de gravité. On est donc ramené au problème des deux corps, et au mouvement étudié au Chapitre X, que nous appellerons *képlérien*.

Nous avons vu que ce mouvement dépendait de six *éléments* : l'orbite de M est donc déterminée par trois observations complètes rapprochées, fournissant l'ascension droite et la déclinaison apparentes de M, en des lieux terrestres donnés, à des époques connues.

Nous nous proposons de montrer ici comment on peut calculer les éléments de cette orbite, à l'aide des données de trois observations, et nous suivrons à cet effet la voie indiquée d'abord par Lagrange, qui se montre la plus simple en théorie comme en pratique. Ajoutons que, d'une façon générale, nous conserverons les notations du Chapitre rappelé ci-dessus.

I. — Problèmes préliminaires

1. L'orbite képlérienne d'un astéroïde ou d'une comète M est complètement déterminée par la connaissance, à un instant donné t, de la position héliocentrique du point M, et par celle

de la vitesse correspondante, considérée bien entendu comme un vecteur.

Le point M est rapporté à trois axes rectangulaires de coordonnées $Oxyz$, dont l'origine O est le Soleil; le plan fondamental Oxy sera indifféremment celui de l'écliptique ou celui de l'équateur moyen d'une certaine date indiquée, l'axe Ox étant toujours dirigé vers l'équinoxe moyen correspondant.

On suppose donc connues les coordonnées x, y, z du point M à l'époque t, et les projections sur les axes de sa vitesse V, soit x', y', z'; on suppose d'ailleurs la vitesse V et ses projections calculées en prenant une unité de temps telle que le coefficient d'attraction devienne égal à l'unité; en d'autres termes, si l'on maintient pour ce coefficient sa valeur f, ou k^2, avec

$$\log k = \bar{2},2355814,$$

en exprimant le temps t en jours moyens, puis qu'on fasse $\tau = kt$, les valeurs de x', y', z' seront celles des dérivées des coordonnées x, y, z prises par rapport à τ, pour l'instant donné.

En appelant r le rayon vecteur OM, on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad V^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad (r > 0, V > 0).$$

On détermine les éléments de l'orbite de la façon suivante. La masse du Soleil étant l'unité, et celle de M étant entièrement négligeable, le demi-grand axe a résulte de l'équation des forces vives

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - V^2;$$

on en déduit, si l'orbite est une ellipse, le moyen mouvement diurne $n = ka^{-\frac{3}{2}}$, qu'il est facile d'exprimer en secondes d'arc, en mettant pour k sa valeur en secondes, dont le logarithme est 3,5500066.

Si p est le paramètre de l'orbite, le vecteur des aires est normal au plan de l'orbite, et est mesuré, dans les hypothèses faites, par $\sqrt{p}$. Si donc ☊ et i sont la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan Oxy, on a,

en projetant le vecteur des aires sur les axes,

$$\sqrt{p}\sin i \sin \theta = yz' - y'z,$$
$$\sqrt{p}\sin i \cos \theta = xz' - x'z,$$
$$\sqrt{p}\cos i \qquad = xy' - x'y,$$

et ces équations font connaître p, θ, i.

En faisant

$$rr' = xx' + yy' + zz',$$

on a aussi directement

$$p = r^2(V^2 - r'^2).$$

La relation $p = a(1 - e^2)$ peut permettre le calcul de l'excentricité e ; on la retrouve, et en même temps on détermine l'anomalie vraie v, en faisant usage des deux formules

$$e \sin v = r'\sqrt{p},$$
$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1 ;$$

la première de ces relations résulte de la seconde par différentiation, en se servant de l'intégrale des aires.

La distance ω du périhélie au nœud résulte enfin des deux relations évidentes

$$r \sin(v + \omega) = z \operatorname{coséc} i,$$
$$r \cos(v + \omega) = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Connaissant v, on en déduit l'anomalie moyenne M pour l'époque t, si du moins l'orbite est elliptique.

Quand l'orbite est parabolique, ce qui exige la condition

$$V^2 = \frac{2}{r},$$

on a

$$\operatorname{tang} \frac{v}{2} = \frac{rr'}{\sqrt{p}},$$

et l'on en déduit, par les méthodes usuelles, l'époque T du passage au périhélie ; de même, quand l'orbite est hyperbolique ou elliptique, mais voisine de la forme parabolique, on calcule cette même époque T : c'est l'élément qui remplace l'anomalie moyenne du mouvement elliptique ordinaire.

2. Envisageons maintenant le problème plus général, dont le précédent n'est qu'un cas limite, celui de la détermination d'une orbite képlérienne par la connaissance des positions héliocentriques du point M à deux instants donnés t_1 et t_2. Nous désignerons par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 respectivement les coordonnées des deux positions données M_1 et M_2 ; r_1, r_2, v_1, v_2 seront les rayons vecteurs et les anomalies vraies, ces dernières étant d'abord inconnues ; et nous remplacerons de plus τ par $k(t_2 - t_1)$.

Soit s le double de l'aire du triangle OM_1M_2, c'est-à-dire la quantité $r_1r_2 \sin(v_2 - v_1)$; en projetant cette aire sur les plans de coordonnées, on a

$$\begin{aligned} s \sin i \sin \vartheta &= y_1z_2 - y_2z_1, \\ s \sin i \cos \vartheta &= x_1z_2 - x_2z_1, \\ s \cos i &= x_1y_2 - x_2y_1, \end{aligned}$$

et ces équations font connaître en même temps que ϑ et i, la quantité s, et par suite la différence $v_2 - v_1$.

Supposons pour un instant le paramètre p connu ; l'équation de l'orbite donne les deux relations

$$e \cos v_2 = \frac{p}{r_2} - 1, \qquad e \cos v_1 = \frac{p}{r_1} - 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} e \sin \frac{v_1 + v_2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_2}\right) \operatorname{coséc} \frac{v_2 - v_1}{2}, \\ e \cos \frac{v_1 + v_2}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_2} - 2\right) \operatorname{séc} \frac{v_2 - v_1}{2}, \end{aligned}$$

et l'on a ainsi l'excentricité e, en même temps que les deux anomalies vraies v_1 et v_2. Le demi-grand axe, le moyen mouvement, les anomalies moyennes pour les deux époques t_1 et t_2 en résultent ; la différence de ces anomalies moyennes doit d'ailleurs être égale à $n(t_2 - t_1)$, et c'est justement là, si l'on veut, le moyen de déterminer p. Enfin la distance ω du périhélie au nœud se calcule comme précédemment, à l'aide de l'une ou l'autre des deux positions données.

Tout revient donc à la détermination du paramètre p, ou à celle d'une inconnue équivalente g définie par la relation

$$s = g\sqrt{p},$$

de sorte que, d'après la loi des aires, $\frac{g}{\tau}$ est le rapport de l'aire du triangle OM_1M_2 à celle du secteur curviligne correspondant compris entre les rayons vecteurs OM_1, OM_2, et l'arc de trajectoire M_1M_2.

Comme les quantités g, s, p sont indépendantes du choix des axes, les données de cette question sont en réalité r_1, r_2, $v_2 - v_1$, τ.

Introduisant a, e, et les deux anomalies excentriques u_1 et u_2 comme inconnues auxiliaires, jointes à l'inconnue principale g, on a entre ces cinq inconnues et les données cinq relations qui s'écrivent sous la forme suivante

$$r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) = g\sqrt{a(1 - e^2)},$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{v_2 - v_1}{2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin\frac{u_2 - u_1}{2},$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{v_2 - v_1}{2} = a\left(\cos\frac{u_2 - u_1}{2} - e\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

$$r_1 + r_2 = 2a\left(1 - e\cos\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_1 + u_2}{2}\right),$$

$$\tau = a^{\frac{3}{2}}\left(u_2 - u_1 - 2e\sin\frac{u_2 - u_1}{2}\cos\frac{u_2 + u_1}{2}\right),$$

ainsi qu'on le voit en combinant d'une façon évidente les formules connues

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \sin\frac{v_2}{2} = \sqrt{1 + e} \sin\frac{u_2}{2}, \qquad \sqrt{\frac{r_1}{a}} \sin\frac{v_1}{2} = \sqrt{1 + e} \sin\frac{u_1}{2},$$

$$\sqrt{\frac{r_2}{a}} \cos\frac{v_2}{2} = \sqrt{1 - e} \cos\frac{u_2}{2}, \qquad \sqrt{\frac{r_1}{a}} \cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{1 - e} \cos\frac{u_1}{2},$$

$$r_2 = a(1 - e\cos u_2), \qquad r_1 = a(1 - e\cos u_1),$$

$$M_2 = u_2 - e\sin u_2, \qquad M_1 = u_1 - e\sin u_1.$$

On en déduit par élimination de a, de $\sqrt{1 - e^2}$ et de $e\cos\frac{u_1 + u_2}{2}$, et en posant

$$m = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{v_2 - v_1}{2}},$$

les deux équations simultanées

$$g = \tau - g^3m^3 \frac{(u_2 - u_1) - \sin(u_2 - u_1)}{8 \sin^3 \frac{u_2 - u_1}{2}},$$

$$\cos \frac{u_2 - u_1}{2} = m \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{g^2m^3}{4},$$

aux deux inconnues g et $u_2 - u_1$.

Dans le problème qui nous occupe, la différence $u_2 - u_1$ est toujours assez petite, sinon très petite : il convient alors de modifier la forme de la première de ces équations, de façon à permettre le calcul exact du coefficient de g^3m^3.

Soit

$$\theta = \text{tang}\, \frac{u_2 - u_1}{2};$$

on a

$$\frac{u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1)}{8 \sin^3 \frac{u_2 - u_1}{2}} = \frac{1}{2} \text{séc}\, \frac{u_2 - u_1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\theta^2}{3.5} + \frac{\theta^4}{5.7} - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{6} \text{séc}^{\frac{3}{5}} \frac{u_2 - u_1}{2} \left(1 - \frac{6}{175}\theta^4 + \dots\right);$$

le coefficient $1 - \frac{6}{175}\theta^4 + \dots$ peut être facilement réduit en une table très courte; pour l'usage actuel, il suffit d'observer qu'on peut sans inconvénient le confondre avec l'unité, avec la précision d'un calcul à cinq décimales, tant que la différence $u_2 - u_1$ est inférieure en valeur absolue à 20° ; l'erreur sur la cinquième décimale de son logarithme est nulle pour

$$| u_2 - u_1 | = 15^\circ,$$

et ne dépasse pas une unité pour

$$| u_2 - u_1 | = 20^\circ.$$

On peut donc écrire simplement

$$g = \tau - \frac{g^3m^3}{6} \text{séc}^{\frac{3}{5}} \frac{u_2 - u_1}{2},$$

avec

$$\cos \frac{u_2 - u_1}{2} = m \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{g^2m^3}{4}.$$

La quantité $\tau^2 m^3$ est petite, et l'on voit immédiatement qu'on peut regarder $\frac{g}{\tau}$ et $\cos\frac{u_2-u_1}{2}$ comme développables suivant les puissances de cette quantité : on résoudra donc les équations précédentes par les approximations successives les plus simples en faisant d'abord $g = \tau$ dans la formule qui donne $\cos\frac{u_2-u_1}{2}$, et en écrivant si l'on veut

$$g = \frac{\tau}{1+\frac{g^2 m^3}{6}\,\text{séc}^{\frac{3}{5}}\frac{u_2-u_1}{2}}.$$

Dans le cas d'une orbite hyperbolique, les anomalies excentriques sont des quantités purement imaginaires, mais rien n'est changé à ce qui précède : on trouvera seulement $\cos\frac{u_2-u_1}{2}$ supérieur à l'unité.

Dans le cas de la parabole, on peut écrire, rigoureusement toujours, puisque les anomalies excentriques sont nulles,

$$g = \frac{3\tau}{1+m(r_1+r_2)},$$

avec la condition

$$\tau^2 = \frac{2}{g}\left(r_1+r_2+\frac{1}{m}\right)^2\left(r_1+r_2-\frac{2}{m}\right)$$

qui exprime que l'orbite est effectivement une parabole.

3. Reprenons les données et les notations du n° 1, en même temps que celles du n° 2, et faisons $\tau_1 = k(t_1 - t)$.

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont des fonctions de τ_1 et de x, y, z, x', y', z', déterminées par les équations du mouvement, qui prennent ici, en raison du choix fait de l'unité de temps, la forme simple (il suffit d'écrire la première)

$$\frac{d^2x_1}{d\tau_1^2}+\frac{x_1}{r_1^3}=0;$$

de plus, pour $\tau_1 = 0$, les fonctions x_1, y_1, z_1 et leurs dérivées premières par rapport à τ_1 doivent se réduire respectivement à x, y, z, x', y', z', ce qui achève de les définir complètement.

Puisque la vitesse V est dans le plan OMM_1 de l'orbite, on peut écrire

$$x_1 = f_1 x + g_1 x', \quad y_1 = f_1 y + g_1 y', \quad z_1 = f_1 z + g_1 z',$$

et tout revient à l'étude des deux coefficients f_1 et g_1, qui sont indépendants du choix des axes de coordonnées, l'origine étant toujours le Soleil.

Avant de montrer comment on peut effectivement déterminer f_1 et g_1 en fonction de τ_1, x, y, z, x', y', z', nous allons donner diverses expressions de ces quantités qui nous seront utiles. Supposons qu'on prenne pour Oxy le plan même de l'orbite, et qu'on dirige l'axe Ox vers le périhélie; on aura, d'après la valeur de la constante des aires, en résolvant les deux premières équations ci-dessus,

$$f_1 \sqrt{p} = x_1 y' - x' y_1, \quad g_1 \sqrt{p} = x y_1 - x_1 y.$$

Ceci montre sans peine que $\frac{g_1}{\tau_1}$ et $\frac{1 - f_1}{\tau_1}$ sont respectivement les rapports des aires des deux triangles OMM_1 et MVM_1 à celle du secteur curviligne correspondant OMM_1, en appelant V l'extrémité du vecteur vitesse pour le point M. En particulier donc, le coefficient g_1 ne diffère pas, en tenant compte du changement de notations, de la quantité g du numéro précédent.

Pour la date t_2, on a des quantités analogues τ_2, f_2, g_2, et l'on vérifie immédiatement que le déterminant $f_1 g_2 - f_2 g_1$ est le coefficient g lui-même étudié ci-dessus.

En introduisant les rayons vecteurs et les anomalies vraies, on a

$$g_1 = \frac{r r_1 \sin(v_1 - v)}{\sqrt{p}}.$$

Avec le choix d'axes indiqué plus haut, on a aussi, d'après l'équation de la trajectoire et l'intégrale des aires,

$$x' = -\frac{\sin v}{\sqrt{p}}, \quad y' = \frac{e + \cos v}{\sqrt{p}},$$

et, par suite,

$$f_1 p = r_1 \cos(v_1 - v) + e r_1 \cos v_1;$$

remplaçant $e \cos v_1$ par $\frac{p}{r_1} - 1$, il vient finalement

$$f_1 = 1 - \frac{2r_1}{p} \sin^2 \frac{v_1 - v}{2}.$$

En rassemblant les formules qui conviennent le mieux au cas où les positions M et M_1 sont rapprochées, on a, en supposant ici connues les quantités a, p, r, r_1, τ_1 :

$$\sin(v_1 - v) = \frac{g_1 \sqrt{p}}{rr_1}. \qquad \sin \frac{u_1 - u}{2} = \frac{g_1}{2\sqrt{arr_1}} \operatorname{séc} \frac{v_1 - v}{2},$$

$$g_1 = \tau_1 - \frac{1}{6}\left(\frac{g_1}{\sqrt{rr_1}} \operatorname{séc} \frac{v_1 - v}{2} \operatorname{séc}^{\frac{1}{3}} \frac{u_1 - u}{2}\right)^3,$$

$$f_1 = 1 - \frac{g_1^2}{2r^2 r_1} \operatorname{séc}^2 \frac{v_1 - v}{2}.$$

Nous avons vu plus haut dans quelles conditions la troisième de ces formules est valable.

Considérant p, r, r_1 comme des quantités du même ordre de grandeur, les équations précédentes permettent un développement rapide, par approximations successives, des inconnues suivant les puissances de la quantité $\tau_1 r^{-\frac{3}{2}}$, qui est petite.

On a des formules toutes semblables pour f_2, g_2 et aussi pour g.

Il convient, pour la suite, de poser

$$g_1 = \tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}, \quad f_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{r^3}, \quad \ldots, \quad g = \tau + \frac{\gamma}{r^3},$$

de sorte que

$$\gamma_1 = -\frac{1}{6}\left[g_1 \sqrt{\frac{r}{r_1}} \operatorname{séc} \frac{v_1 - v}{2} \operatorname{séc}^{\frac{1}{3}} \frac{u_1 - u}{2}\right]^3,$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2}\left[g_1 \sqrt{\frac{r}{r_1}} \operatorname{séc} \frac{v_1 - v}{2}\right]^2,$$

$$\gamma = -\frac{1}{6}\left[g \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \operatorname{séc} \frac{v_2 - v_1}{2} \operatorname{séc}^{\frac{1}{3}} \frac{u_2 - u_1}{2}\right]^3.$$

4. Cherchons maintenant les expressions explicites de f_1 et g_1 en fonction de τ_1 et de x, y, z, x', y' z'. Ces expressions

ne peuvent être obtenues commodément que sous forme de séries dont la formation est simple.

En mettant pour x_1, y_1, z_1 leurs valeurs $f_1 x + g_1 x'$, ... dans les équations du mouvement, on en déduit immédiatement que f_1 et g_1 vérifient les deux équations différentielles

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau_1^2} + \frac{f_1}{r_1^3} = 0, \qquad \frac{d^2 g_1}{d\tau_1^2} + \frac{g_1}{r_1^3} = 0,$$

avec la condition

$$r_1^2 = r^2 f_1^2 + 2rr' f_1 g_1 + V^2 g_1^2.$$

De plus, il est clair que, pour $\tau_1 = 0$, les quantités f_1 et g_1 se réduisent respectivement à 1 et 0, tandis que les dérivées $\frac{df_1}{d\tau_1}$, $\frac{dg_1}{d\tau_1}$ deviennent 0 et 1. Les équations différentielles précédentes déterminent alors complètement f_1 et g_1, par exemple à l'aide d'une méthode d'approximations successives, et l'on trouve sans peine

$$f_1 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2r^3} + \frac{r'\tau_1^3}{2r^4} - \frac{\tau_1^4}{24r^6}(2 + 15rr'^2 - 3rV^2)$$
$$+ \frac{r'\tau_1^5}{8r^8}(2 + 7rr'^2 - 3rV^2) + \dots,$$

$$g_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6r^3} + \frac{r'\tau_1^4}{4r^4} - \frac{\tau_1^5}{40r^6}\left(\frac{8}{3} + 15rr'^2 - 3rV^2\right)$$
$$+ \frac{r'\tau_1^6}{12r^7}\left(\frac{5}{2} + 7rr'^2 - 3rV^2\right) + \dots.$$

Les développements de f_1 et de $\frac{g_1}{\tau_1}$ sont en réalité ordonnés suivant les puissances de $\tau_1 r^{-\frac{3}{2}}$, et les coefficients sont alors des polynomes entiers par rapport à rr'^2 et rV^2, en observant de plus que les puissances impaires de τ_1 sont toujours accompagnées du facteur $r'\sqrt{r}$. Comme on doit nécessairement s'y attendre, ces quantités $r'\sqrt{r}$ et rV^2 sont de purs nombres, et en effet

$$r'\sqrt{r} = e \sin v \sqrt{\frac{r}{p}}, \qquad rV^2 = 2 - \frac{r}{a}.$$

Les coefficients f_2 et g_2 se développent de même suivant les puissances de τ_2; quant à la quantité g égale à $f_1 g_2 - f_2 g_1$, elle se développe suivant les puissances de τ_1 et de τ_2; on a

d'ailleurs $\tau = \tau_2 - \tau_1$, et il est clair que le rapport $\frac{g}{\tau}$ est symétrique par rapport à τ_1 et τ_2, la différence $g - \tau$ contenant nécessairement τ^3 en facteur. En n'écrivant que les premiers termes,

$$g = \tau - \frac{\tau^3}{6r^3} + \frac{r'}{4r^4}\tau^3(\tau_1 + \tau_2) + \ldots.$$

Regardons les quantités τ_1 et τ_2 comme exactement connues, tandis que les éléments dont on dérive r, r', V ou bien r_1 et r_2 (suivant qu'on emploie les séries précédentes ou les formules finies du n° 3), ne sont connus qu'avec une erreur de l'ordre i par exemple, par rapport à $\tau_1 r^{-\frac{3}{2}}$, $\tau_2 r^{-\frac{3}{2}}$, considérés comme de petites quantités du premier ordre. On voit tout de suite que f_1, $\frac{g_1}{\tau_1}$, ... ne peuvent être calculés qu'avec une erreur de l'ordre $i + 2$; mais on pourra obtenir les rapports $\frac{\gamma_1}{\tau_1^3}$, ..., avec une erreur de l'ordre $i + 1$, et cette erreur sera diminuée par la petitesse du facteur $r'\sqrt{r}$, c'est-à-dire par celle de $e \sin v$; de plus, quand il s'agit de $\frac{\gamma}{r^3}$, on voit encore que l'erreur sera diminuée par la petitesse du facteur $\tau_1 + \tau_2$, et deviendra de l'ordre $i + 2$ si le rapport $\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1}$ peut être considéré comme du premier ordre. Ces observations sont essentielles pour la suite.

5. Nous rencontrerons plus loin un système de deux équations simultanées de la forme

$$\rho = P + \frac{Q + q\rho}{r^3}, \qquad r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2,$$

dans lesquelles les deux inconnues ρ et r sont assujetties à la seule condition d'être positives, et où les coefficients vérifient les conditions suivantes : les égalités

$$q = 0, \qquad Q = -PR^3,$$

sont très près d'être vérifiées, et l'on a en outre

$$S^2 \leqq R^2, \qquad R > 0.$$

Ce système d'équations est facile à discuter quand on

suppose les égalités précédentes exactement vérifiées. L'élimination de r montre que tout revient à chercher le nombre des racines positives de l'équation en ρ

$$\rho = P - PR^3(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^{-\frac{3}{2}},$$

le radical étant positif, c'est-à-dire sous la condition $\frac{\rho}{P} < 1$.

Cette équation rendue entière devient

$$f(\rho) = \rho f_1(\rho) = (\rho - P)^2(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^3 - P^2R^6 = 0:$$

elle est du huitième degré, mais admet une racine nulle. Il s'agit de savoir combien elle a de racines positives, vérifiant en outre la condition $\rho < P$, si P est une quantité positive.

En désignant par $f'(\rho)$ la dérivée de $f(\rho)$, on a

$$f'(\rho) = 2(\rho - P)(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^2[4\rho^2 + (5S - 3P)\rho + R^2 - 3PS],$$

et comme $\rho^2 + 2S\rho + R^2$ ne peut s'annuler d'après l'hypothèse faite sur S, on voit que l'équation $f'(\rho) = 0$ a au plus trois racines réelles; par suite, l'équation $f(\rho) = 0$ a au plus trois racines réelles non nulles.

On a en outre

$$f_1(P) = -PR^6, \quad f_1(0) = 2PR^4(3PS - R^2),$$

le premier coefficient de $f_1(\rho)$ étant d'ailleurs positif.

Si l'on a $P < 0$, l'équation $f_1(\rho) = 0$ a au moins une racine inférieure à P, et par suite deux racines positives au plus; elle en aura une et une seule si $3PS > R^2$.

Si l'on a $P > 0$, l'équation a au moins une racine supérieure à P, et par suite au plus deux racines positives et inférieures à P; elle en a une et une seule encore sous la condition $3PS > R^2$.

En résumé, l'équation proposée en ρ, soit

$$\rho = P - PR^3(\rho^2 + 2S\rho + R^2)^{-\frac{3}{2}},$$

a au plus deux racines positives; elle en a une et une seule sous la condition $3PS > R^2$.

Pour faciliter le calcul des racines acceptables, faisons

$$\frac{\rho}{R} = m, \quad p = \frac{R}{P}, \quad \sigma = \frac{S}{R},$$

de sorte que

$$mp = 1 - (m^2 + 2\sigma m + 1)^{-\frac{3}{2}},$$

et considérons σ comme une quantité donnée inférieure ou égale à l'unité en valeur absolue.

Il sera facile alors de construire une courte table à double entrée donnant les valeurs de p en fonction de m et σ, en faisant varier σ depuis -1 jusqu'à $+1$, de dixième en dixième, et m depuis o jusqu'à 4 par exemple, de deux en deux dixièmes : la lecture de cette table donnera immédiatement d'une façon approchée la ou les valeurs de m qui correspondent inversement à des valeurs données de p et σ.

Il est facile de se rendre compte de la variation de p, considéré comme fonction de la seule variable positive m, en construisant la courbe définie par l'équation précédente, où l'on regarde m et p comme les coordonnées d'un point dans un plan par rapport à deux axes om, op. Cette courbe, d'après ce qui précède, ne peut être coupée par une parallèle à l'axe om qu'en deux points au plus.

En supposant m petit, un développement en série très simple donne

$$p = 3\sigma + \frac{3}{2}(1 - 5\sigma^2)m + \ldots\ldots,$$

et par suite la courbe part d'un point d'ordonnée 3σ situé sur l'axe op, avec une tangente dont le coefficient angulaire est positif ou négatif suivant que la quantité σ^2 est inférieure ou supérieure à $\frac{1}{5}$.

En excluant le cas limite où $\sigma = -1$, la fonction p est continue pour toutes les valeurs positives de m, et tend vers zéro par valeurs positives quand m devient infini ; elle s'annule une seule fois, pour $m = -2\sigma$, si l'on a $\sigma \leqq 0$.

Ces remarques suffisent pour tracer la courbe, qui a nécessairement, suivant les cas, l'une des formes de la figure 81 : la forme (a) correspond à $-1 < \sigma < -\frac{1}{\sqrt{5}}$; la forme ($b$) à $-\frac{1}{\sqrt{5}} < \sigma < 0$; la forme ($c$) à $0 < \sigma < \frac{1}{\sqrt{5}}$; la forme ($d$) à $\frac{1}{\sqrt{5}} < \sigma \leqq 1$; d'ailleurs $\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}447\ldots\ldots$

Dans tous les cas, on voit qu'à une valeur de p comprise entre o et 3σ correspond une valeur de m et une seule ; c'est la condition trouvée ci-dessus pour que l'équation proposée admette une racine unique acceptable.

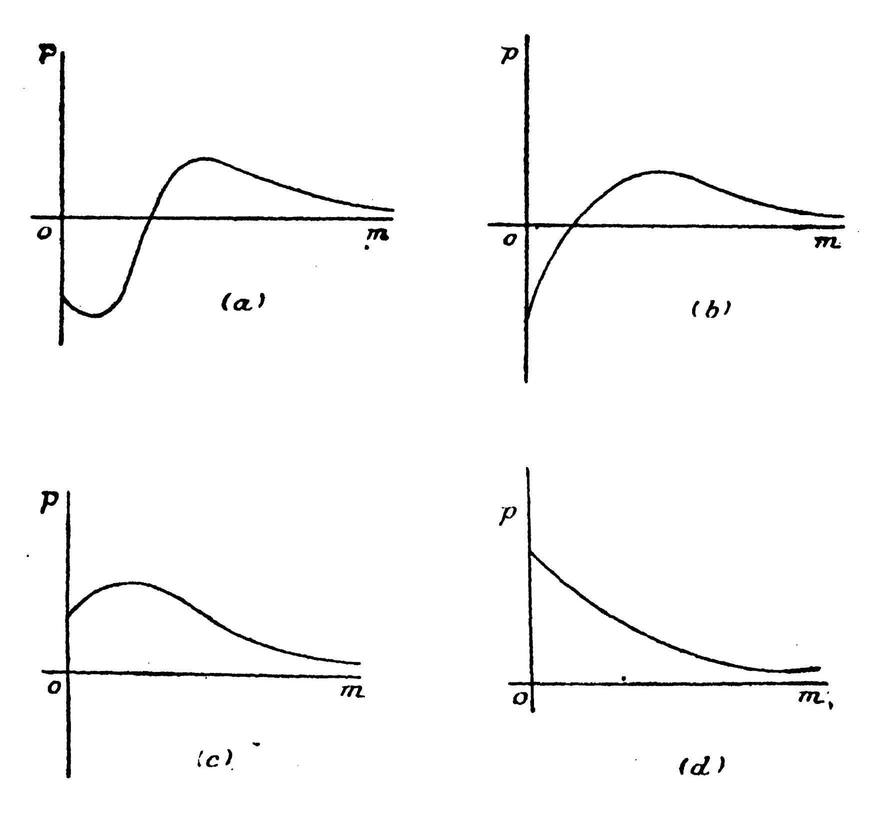


Fig. 81 (a), (b), (c), (d)

Quand on connaît une valeur approchée d'une racine ρ de l'équation

$$F(\rho) = \rho - P - \frac{Q + q\rho}{r^3} = 0,$$

où

$$r = \sqrt{\rho^2 + 2S\rho + R^2},$$

on obtiendra la valeur exacte de cette racine en appliquant l'une des méthodes usuelles d'approximation ; si l'on veut employer la méthode de Newton qui est généralement la meilleure, il suffira de savoir calculer la dérivée

$$F'(\rho) = 1 - \frac{q}{r^3} + \frac{3(Q + q\rho)(\rho + S)}{r^5}.$$

Si cette dérivée est petite, c'est-à-dire si l'équation a deux racines voisines, le calcul demandera, bien entendu, quelques précautions et ne conduira qu'à une faible précision.

II. — Détermination d'une orbite képlérienne par trois observations rapprochées

6. Indiquons d'abord comment on doit préparer les données d'une observation, qui sont, à une date t', l'ascension droite et la déclinaison apparentes α', δ' de l'astre observé M en un certain lieu terrestre P. La date t' sera exprimée en jours moyens, et rapportée au méridien fondamental.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'on connaît la distance MP avec quelque approximation. On corrige alors l'observation de la parallaxe, en utilisant les facteurs de la parallaxe, publiés généralement en même temps que l'observation; puis, par application de la précession et de la nutation, on rapporte la direction ainsi corrigée à l'équateur et à l'équinoxe moyens du commencement de l'année tropique à laquelle appartiennent les dates des trois observations, ou qui commence entre ces dates. En même temps, on corrige la date t' du temps d'aberration, égal à $\varkappa \,.\, \mathrm{MP}$, en appelant $\varkappa$ l'équation de la lumière exprimée en jours moyens, de sorte que $\log \varkappa = \bar{3},76105$.

Si O′ est le centre de la Terre, on obtient ainsi l'ascension droite α et la déclinaison δ de la direction O′M à la date corrigée t, pour les éléments de référence indiqués. Si alors X, Y, Z sont les coordonnées rectilignes correspondantes du Soleil pour la date t, telles qu'on les trouve dans les éphémérides; si l'on désigne la distance géocentrique O′M par ρ, et qu'on appelle x, y, z les coordonnées rectilignes équatoriales héliocentriques de M à la date t, on a les trois équations

$$\rho \cos\delta \cos\alpha = x + X, \qquad \rho \cos\delta \sin\alpha = y + Y, \qquad \rho \sin\delta = z + Z.$$

Lorsque la distance MP est entièrement inconnue, on ne peut procéder de la même façon. Tout d'abord, au lieu de faire porter la correction de parallaxe sur les coordonnées observées, on la fait porter (et l'on pourrait faire de même dans le cas

précédent) sur les coordonnées du Soleil, en déterminant celles-ci non plus pour le centre O′ de la Terre, mais pour le lieu d'observation P lui-même ; il suffit, à cet effet, d'ajouter aux coordonnées géocentriques X′, Y′, Z′ du Soleil, calculées cette fois pour la date même t' de l'observation, les coordonnées rectilignes équatoriales de O′ par rapport à P, dont il est inutile de rapporter ici les valeurs.

D'autre part, on tient compte de l'aberration en corrigeant la direction observée de l'aberration des fixes, en même temps qu'on la rapporte aux mêmes axes que précédemment. Si l'on veut obtenir une grande précision, on peut tenir compte des termes complémentaires de l'aberration dus à l'excentricité de l'orbite du Soleil.

Désignons par α, δ l'ascension droite et la déclinaison observées, corrigées comme on vient de le dire ; par X, Y, Z les coordonnées du Soleil X′, Y′, Z′, corrigées pour la parallaxe ; par ρ la distance PM, et par t la date t' diminuée du temps d'aberration inconnu $\varkappa\rho$; enfin par x, y, z les coordonnées héliocentriques de M à la date inconnue t. On sait, d'après la théorie de l'aberration, que α, δ sont les coordonnées angulaires de la droite qui joint le lieu d'observation P à la date t' et le point M à la date t, le Soleil étant regardé comme fixe dans l'espace. On a donc les mêmes équations que ci-dessus

$$\rho \cos\delta \cos\alpha = x + X, \quad \rho \cos\delta \sin\alpha = y + Y, \quad \rho \sin\delta = z + Z,$$

la signification des lettres n'étant pas absolument la même.

Dans tous les cas, il serait facile d'employer d'autres éléments de référence et d'introduire, par exemple, les coordonnées écliptiques, en s'arrangeant même de façon que la quantité Z fût exactement nulle ; mais l'avantage qui peut en résulter paraît bien léger en raison des calculs nouveaux qui deviennent alors nécessaires.

7. Abordons maintenant le problème fondamental, celui de la détermination de l'orbite képlérienne du point M d'après trois observations données, rapprochées. Conservant les notations précédentes pour l'une de ces observations, nous marquerons des indices 1 et 2 respectivement toutes les quantités

correspondantes relatives aux deux autres; et, en même temps, nous reprendrons les notations du paragraphe précédent. Nous ferons aussi

$$(1) \qquad \lambda = \cos\delta\cos\alpha, \qquad \mu = \cos\delta\sin\alpha, \qquad \nu = \sin\delta,$$

de sorte que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la direction observée, convenablement corrigée.

Les données du problème sont, avec les dates des trois observations, les neuf cosinus tels que λ, μ, ν, et les neuf coordonnées du Soleil, telles que X, Y, Z. On a d'abord les neuf équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \lambda\rho = x + X, & \lambda_1\rho_1 = x_1 + X_1, & \lambda_2\rho_2 = x_2 + X_2, \\ \mu\rho = y + Y, & \mu_1\rho_1 = y_1 + Y_1, & \mu_2\rho_2 = y_2 + Y_2, \\ \nu\rho = z + Z, & \nu_1\rho_1 = z_1 + Z_1, & \nu_2\rho_2 = z_2 + Z_2. \end{cases}$$

Les dates t, t_1, t_2 auxquelles se rapportent les coordonnées héliocentriques x, y, z, ..., sont ou bien connues, ou bien inconnues; mais dans ce dernier cas, si t', t'_1, t'_2 sont les dates mêmes des observations, on a

$$(3) \qquad t = t' - \varkappa\rho, \qquad t_1 = t'_1 - \varkappa\rho_1, \qquad t_2 = t'_2 - \varkappa\rho_2,$$

et les approximations successives conduiront rapidement, en raison de la petitesse de $\varkappa$, aux valeurs exactes de t, t_1, t_2, dont les premières valeurs approchées seront t', t'_1, t'_2.

Comme précédemment, on fait

$$(4) \quad \tau_1 = k(t_1 - t), \qquad \tau_2 = k(t_2 - t), \qquad \tau = \tau_2 - \tau_1 = k(t_2 - t_1);$$

en règle générale, on choisira pour t la date intermédiaire, de sorte que τ_1 et τ_2 seront des quantités respectivement positive et négative, si du moins l'on a $t_1 < t < t_2$.

Aux équations (2) qui ne font que traduire les observations, il faut joindre de nouvelles relations qui expriment que les trois positions M, M_1, M_2 appartiennent à une même orbite képlérienne, aux dates t, t_1, t_2. Si x', y', z' sont les dérivées de x, y, z pour l'époque t, il est donc nécessaire et suffisant de vérifier les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = f_1 x + g_1 x', & x_2 = f_2 x + g_2 x', \\ y_1 = f_1 y + g_1 y', & y_2 = f_2 y + g_2 y', \\ z_1 = f_1 z + g_1 z', & z_2 = f_2 z + g_2 z', \end{cases}$$

les coefficients f_1, g_1, f_2, g_2, étant les fonctions de x, y, z, x', y', z', ainsi que de τ_1 ou τ_2, que nous avons étudiées ci-dessus. Nous nous servirons aussi de la quantité analogue g, égale à $f_1 g_2 - f_2 g_1$.

Les neuf équations (2) et les six équations (5) forment un système de quinze équations à quinze inconnues, savoir x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ρ, ρ_1, ρ_2, x', y', z' : une fois ces équations résolues, on pourra déterminer les éléments de l'orbite comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, en partant soit de x, y, z, x', y', z' soit de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 : mais dans ce second procédé, les calculs sont moins simples.

En éliminant tour à tour x', y', z' et x, y, z entre les équations (5), on les remplace par les deux groupes de trois équations

$$(6)\qquad \begin{cases} gx - g_2 x_1 + g_1 x_2 = 0, \\ gy - g_2 y_1 + g_1 y_2 = 0, \\ gz - g_2 z_1 + g_1 z_2 = 0, \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad gx' = f_1 x_2 - f_2 x_1, \qquad gy' = f_1 y_2 - f_2 y_1, \qquad gz' = f_1 z_2 - f_2 z_1.$$

Ces nouvelles équations, jointes aux équations (2) écrites sous la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \lambda\rho - X, & x_1 = \lambda_1\rho_1 - X_1, & x_2 = \lambda_2\rho_2 - X_2, \\ y = \mu\rho - Y, & y_1 = \mu_1\rho_1 - Y_1, & y_2 = \mu_2\rho_2 - Y_2, \\ z = \nu\rho - Z, & z_1 = \nu_1\rho_1 - Z_1, & z_2 = \nu_2\rho_2 - Z_2, \end{cases}$$

forment un système équivalent au système donné.

Les équations (6) elles-mêmes peuvent être remplacées par trois autres équations équivalentes qu'on obtiendra de la façon suivante. En y portant les expressions (8) des coordonnées x, y, z, ..., elles deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda g\rho - \lambda_1 g_2\rho_1 + \lambda_2 g_1\rho_2 = gX - g_2 X_1 + g_1 X_2, \\ \mu g\rho - \mu_1 g_2\rho_1 + \mu_2 g_1\rho_2 = gY - g_2 Y_1 + g_1 Y_2, \\ \nu g\rho - \nu_1 g_2\rho_1 + \nu_2 g_1\rho_2 = gZ - g_2 Z_1 + g_1 Z_2. \end{cases}$$

Regardant alors ρ, ρ_1, ρ_2 comme les seules inconnues, résol-

vons d'abord ces équations par rapport à ρ ; si l'on fait

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} A = gX - g_2X_1 + g_1X_2, \quad B = gY - g_2Y_1 + g_1Y_2, \\ C = gZ - g_2Z_1 + g_1Z_2, \\ \Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu & \mu_1 & \mu_2 \\ \nu & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} A & \lambda_1 & \lambda_2 \\ B & \mu_1 & \mu_2 \\ C & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}, \end{array}\right.$$

il vient

$$(11)\qquad \rho g \Delta = D.$$

Puis, supposant ρ connu, résolvons maintenant deux des équations (9), par exemple les deux premières, par rapport à ρ_2 ; on aura

$$(12)\qquad \rho_2 g_1 (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \rho g (\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu) + \lambda_1 B - \mu_1 A ;$$

et enfin tirons ρ_1 de l'une d'elles, soit la première, de façon que

$$(13)\qquad \rho_1 g_2 \lambda_1 = \rho g \lambda + \rho_2 g_1 \lambda_2 - A,$$

ou bien écrivons, en déterminant ρ_1 comme ρ_2,

$$(13^{bis})\qquad \rho_1 g_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \rho g(\lambda\mu_2 - \lambda_2\mu) + \lambda_2 B - \mu_2 A.$$

Les équations (11), (12) et (13) ou (13bis) remplaceront les équations (6) ou (9).

Il convient encore de remarquer qu'on peut supprimer l'intermédiaire de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, en ayant soin alors d'écrire les équations (7) sous la forme

$$(7^{bis})\qquad \left\{\begin{array}{l} gx' = f_1\lambda_2\rho_2 - f_2\lambda_1\rho_1 + f_2X_1 - f_1X_2, \\ gy' = f_1\mu_2\rho_2 - f_2\mu_1\rho_1 + f_2Y_1 - f_1Y_2, \\ gz' = f_1\nu_2\rho_2 - f_2\nu_1\rho_1 + f_2Z_1 - f_1Z_2. \end{array}\right.$$

Enfin, si l'on introduit le rayon vecteur r comme inconnue supplémentaire, on a d'après les relations (8)

$$(14)\qquad r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2 \quad (r > 0),$$

en posant

$$(15)\quad S = -(\lambda X + \mu Y + \nu Z), \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (R > 0).$$

8. Avant d'indiquer l'usage des équations que nous venons d'établir, il faut traiter un cas particulier qui nous montrera clairement quelle est la marche à suivre en général. Imaginons

que, les quantités τ_1 et τ_2 étant très petites du premier ordre, on veuille développer la solution suivant les puissances de ces quantités, de sorte que si τ_1 et τ_2 tendent vers zéro, on tombe ainsi sur la méthode proposée par Laplace.

Il convient tout d'abord, pour donner un sens précis à cette question, d'écrire λ_1 et λ_2 par exemple sous une forme qui fasse voir nettement que λ, λ_1, λ_2 sont les valeurs d'une même fonction du temps pour les époques t, t_1, t_2. On y réussit, et cela d'une façon symétrique, en faisant

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda^{(1)}\tau_1 - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2,$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda^{(1)}\tau_2 - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2,$$

les coefficients $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ étant terminés par ces équations mêmes, de sorte que

$$\lambda^{(1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\tau}, \quad \frac{\lambda^{(2)}}{2} = \frac{\tau\lambda - \tau_2\lambda_1 + \tau_1\lambda_2}{\tau\tau_1\tau_2};$$

ce sont des quantités finies, car si τ_1 et τ_2 tendent vers zéro, $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ tendent respectivement vers les dérivées première et seconde de la fonction λ pour l'époque t. En effet, on a les développements

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda'\tau_1 + \frac{1}{2}\lambda''\tau_1^2 + \frac{1}{6}\lambda'''\tau_1^3 + \ldots,$$

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda'\tau_2 + \frac{1}{2}\lambda''\tau_2^2 + \frac{1}{6}\lambda'''\tau_2^3 + \ldots,$$

d'où

$$\lambda^{(1)} = \lambda' + \frac{1}{2}\lambda''(\tau_1 + \tau_2) + \ldots, \quad \lambda^{(2)} = \lambda'' + \frac{1}{3}\lambda'''(\tau_1 + \tau_2) + \ldots;$$

on voit de plus par ces égalités que les différences

$$\lambda^{(1)} - \lambda', \quad \lambda^{(2)} - \lambda''$$

sont en général du premier ordre et deviennent du second ordre dans le cas, que nous dirons *spécial*, où la quantité $\tau_1 + \tau_2$ peut être considérée elle-même comme du second ordre : cette hypothèse correspond au cas où les dates des trois observations sont très sensiblement équidistantes.

Nous emploierons des notations analogues pour représenter μ_1, μ_2, ν_1 ν_2, X_1, X_2,.....

Dans ces conditions, on a d'abord

$$\Delta = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2 \,|\, \lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)} \,|,$$

en convenant de n'écrire que la première ligne d'un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} \\ \mu & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \\ \nu & \nu^{(1)} & \nu^{(2)} \end{vmatrix}.$$

D'autre part, avec les valeurs de g, g_1, g_2, développées en série comme au paragraphe précédent, on trouve sans peine

$$\begin{aligned} A &= gX - g_2X_1 + g_1X_2 \\ &= \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2\left[X^{(2)} + \frac{X}{r^3} + (\tau_1+\tau_2)\left(\frac{X^{(1)}}{3r^3} - \frac{r'X}{r^4}\right) + \ldots\right], \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour B, C.

On a de plus

$$D = \tau \left| A \quad \lambda - \frac{\lambda^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2 \quad \lambda^{(1)} \right|,$$

et, par suite, l'équation (11) devient

$$(a) \qquad \rho \,|\, \lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)} \,| = \left| \lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X^{(2)} + \frac{X}{r^3} \right|,$$

en ne négligeant que des termes généralement du premier ordre, mais qui deviennent du second ordre dans le cas spécial.

Avant d'examiner de plus près cette équation, achevons la solution, et pour cela faisons encore

$$\rho_1 = \rho + \rho^{(1)}\tau_1 - \frac{\rho^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2, \qquad \rho_2 = \rho + \rho^{(1)}\tau_2 - \frac{\rho^{(2)}}{2}\tau_1\tau_2;$$

on trouve ainsi, en n'écrivant que les termes d'ordre moindre,

$$\lambda g\rho - \lambda_1 g_2\rho_1 + \lambda_2 g_1\rho_2 = \frac{1}{2}\tau\tau_1\tau_2\left[2\lambda^{(1)}\rho^{(1)} + \lambda\rho^{(2)} + \lambda^{(2)}\rho + \frac{\lambda\rho}{r^3} + \ldots\right],$$

et, par suite, les équations (9) prennent la forme

$$2\lambda^{(1)}\rho^{(1)} + \lambda\rho^{(2)} + \lambda^{(2)}\rho + \frac{\lambda\rho}{r^3} = X^{(2)} + \frac{X}{r^3} + \ldots,$$

en n'écrivant que les termes principaux.

Résolvant ces trois équations aux inconnues ρ, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ par rapport à ρ, on retombe bien entendu sur l'équation (a) précédente ; on peut ensuite en tirer $\rho^{(1)}$ de bien des façons, en supposant ρ et r connus, et toujours dans les mêmes conditions d'exactitude, par exemple

$$(b) \qquad 2\rho^{(1)} \,|\, \lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)} \,| = \left| \lambda \quad X^{(2)} + \frac{X}{r^3} \quad \lambda^{(2)} \right|.$$

Enfin, on a

$$(c) \qquad x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$

et par les équations (7bis)

$$(d) \qquad \begin{cases} x' = \lambda\rho^{(1)} + \lambda^{(1)}\rho - X^{(1)}, \qquad y' = \mu\rho^{(1)} + \mu^{(1)}\rho - Y^{(1)}, \\ z' = \nu\rho^{(1)} + \nu^{(1)}\rho - Z^{(1)}. \end{cases}$$

Toutes les inconnues fondamentales sont ainsi déterminées, et toujours avec la même approximation du premier ordre en général, du second ordre dans le cas spécial : ce fait constant est au surplus intuitif, puisque, par raison de symétrie, les termes du premier ordre dans les différents développements envisagés ne peuvent dépendre que de la somme $\tau_1 + \tau_2$.

Revenons maintenant à l'équation (a), qui contient les deux inconnues ρ et r. En déterminant P et Q par les relations

$$P|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = |\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X^{(2)}|, \qquad Q|\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)}| = |\lambda \quad \lambda^{(1)} \quad X|,$$

on tombe sur le système étudié au n° 5 ; l'hypothèse $q = 0$ est vérifiée, et nous allons voir que l'égalité $Q = -PR^3$ est très près de l'être. En effet, la trajectoire du Soleil autour de la Terre est très sensiblement képlérienne, de sorte que les nombres $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $Z^{(2)}$, qui diffèrent très peu des dérivées secondes des coordonnées du Soleil, sont en réalité, d'après les équations différentielles du mouvement, très voisins de $-\frac{X}{R^3}$, $-\frac{Y}{R^3}$, $-\frac{Z}{R^3}$: il en résulte bien que Q diffère très peu $-PR^3$. En d'autres termes le système des deux équations en ρ et r admet d'une façon très approchée la solution $\rho = 0$, $r = R$: c'est une solution parasite qui ne doit pas surprendre, puisque, si l'orbite de la Terre était rigoureusement képlérienne et si les observations étaient faites au centre de la Terre, les

équations du problème seraient évidemment vérifiées par l'orbite de la Terre correspondant à l'hypothèse $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0$.

Les considérations qui précèdent n'ont qu'une portée générale, et des difficultés pourront se présenter qui en altéreront la valeur. En se plaçant au point de vue purement analytique, ceci ne peut arriver que si les deux solutions possibles de l'équation (a) sont confondues, ou bien si le déterminant $|\lambda\ \lambda^{(1)}\ \lambda^{(2)}|$ est nul. Dans le premier cas, le calcul des inconnues peut se faire sans aucun changement ; mais les développements supposés suivant les puissances de τ_1 et τ_2 sont impossibles ; si en effet ρ_0 est la racine double de l'équation (a), il est clair que la valeur exacte de ρ prend la forme $\rho_0 + K\sqrt{\tau_1 + \tau_2} + \ldots$, en désignant par K une constante. L'approximation des résultats se trouve diminuée d'une façon correspondante, et il en est de même si, sans être exactement dans ce cas, on en est voisin.

Le déterminant $|\lambda\ \lambda^{(1)}\ \lambda^{(2)}|$ s'annule en même temps que

$$\Delta = |\lambda\quad \lambda_1\quad \lambda_2|,$$

c'est-à-dire si les trois directions observées appartiennent à un même plan. Dans ce cas, si ces directions ne sont pas confondues, on peut supposer les quantités $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ et λ_1 non nulles, et les équations (12) et (13) subsistant, l'équation (11) devient

$$D = |A\quad \lambda_1\quad \lambda_2| = 0.$$

Si cette équation ne se réduit pas à une identité, elle établit une relation entre g, g_1, g_2, qui, jointe aux autres équations, permet, plus ou moins facilement, de résoudre le problème. Si elle se réduit à une identité, c'est-à-dire si les déterminants

$$|X\quad \lambda_1\quad \lambda_2|,\quad |X_1\quad \lambda_1\quad \lambda_2|,\quad |X_2\quad \lambda_1\quad \lambda_2|$$

sont nuls, le problème est indéterminé, l'indétermination étant du premier ordre ; ces conditions expriment que les directions observées et celles du Soleil appartiennent toutes à un même plan.

Si les trois directions observées sont confondues, on peut supposer λ non nul ; à la première des équations (9) qu'on peut alors conserver, il faut adjoindre les deux relations

$$\lambda B - \mu A = 0,\qquad \lambda C - \nu A = 0,$$

et l'on achève comme ci-dessus; les directions du Soleil étant nécessairement distinctes, il ne peut y avoir qu'une indétermination du premier ordre, et cela dans le cas où ces directions appartiennent avec la direction unique de l'astre à un même plan.

En résumé, le problème n'est indéterminé que si l'orbite considérée et celle du Soleil sont dans un même plan, celui de l'écliptique. C'est ce que montrent les considérations géométriques les plus simples, puisqu'il s'agit de trouver une section conique admettant le Soleil comme foyer, et rencontrant trois droites données en des points tels que les aires des secteurs curvilignes déterminés par le Soleil et ces trois points soient dans des rapports donnés avec la racine carrée du paramètre de l'orbite.

9. Arrivons maintenant à la résolution des équations générales établies au n° 7.

On calculera d'abord τ, τ_1, τ_2 par les formules (4), puis le déterminant Δ; on formera à cet effet les trois mineurs

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \qquad \nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1, \qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1,$$

de sorte que

$$\Delta = \lambda(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \mu(\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1) + \nu(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1).$$

Ici, comme dans tout ce qui suit, les calculs se font directement avec l'aide d'une table de multiplication ou d'une machine; ou bien par logarithmes, et la seule table nécessaire est alors celle des logarithmes d'addition et de soustraction, en même temps que la table des logarithmes des nombres.

On doit observer que les données étant supposées connues avec un certain degré d'exactitude (en faisant abstraction des erreurs d'observation), il y aura nécessairement, d'après les développements du numéro précédent, lorsque les intervalles de temps τ_1 et τ_2 sont petits, une certaine perte de précision dans le calcul des mineurs $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$, ..., et que cette perte s'accentuera beaucoup dans le calcul de Δ, de sorte que ce déterminant ne sera connu qu'avec un nombre de chiffres significatifs bien inférieur à celui des données.

Si le mineur $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ est relativement bien déterminé, on conservera l'équation (12) comme elle est écrite; sinon, on lui

substituera une équation analogue, dans laquelle le coefficient de $g_1\rho_2$ sera connu d'une façon plus précise; mais nous continuerons à raisonner sur cette équation même, les changements qui peuvent devenir nécessaires se faisant d'eux-mêmes. L'équation (13) aussi devra être changée si le coefficient λ_1 n'est pas bien déterminé.

Il faut encore calculer le déterminant D. Mettant les quantités g, g_1, g_2 sous la forme indiquée au n° 3

$$g = \tau + \frac{\gamma}{r^3}, \quad g_1 = \tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}, \quad g_2 = \tau_2 + \frac{\gamma_2}{r^3},$$

on a

$$A = X' + \frac{X''}{r^3}, \quad B = Y' + \frac{Y''}{r^3}, \quad C = Z' + \frac{Z''}{r^3},$$

en faisant

$$(16) \qquad X' = \tau X - \tau_2 X_1 + \tau_1 X_2, \quad X'' = \gamma X - \gamma_2 X_1 + \gamma_1 X_2, \quad \ldots\ldots,$$

de sorte que

$$D = D' + \frac{D''}{r^3},$$

avec

$$D' = |\, X' \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \,|, \qquad D'' = |\, X'' \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \,|.$$

Ces déterminants sont faciles à calculer, en les développant comme Δ.

Les coefficients γ, γ_1, γ_2 n'étant pas connus, on les remplace par des valeurs approchées; en première approximation, on a

$$(18) \qquad \gamma = -\frac{\tau^3}{6}, \quad \gamma_1 = -\frac{\tau_1^3}{6}, \quad \gamma_2 = -\frac{\tau_2^3}{6};$$

et, quand on connaît déjà une solution approchée du problème, on prendra les valeurs qui résultent des formules du n° 3.

Posant alors

$$(19) \qquad P = \frac{D'}{\tau\Delta}, \quad Q = \frac{D''}{\tau\Delta}, \quad q = -\frac{\gamma}{\tau},$$

l'équation (11) prend la forme

$$(20) \qquad \rho = P + \frac{Q + q\rho}{r^3},$$

et jointe à l'équation (14), forme le système étudié au n° 5.

Le déterminant D' est, comme Δ, connu avec une précision

notablement inférieure à celle des données, surtout parce qu'il en est ainsi de X', Y', Z' ; D'' est très voisin de $-D'R^2$, comme nous l'avons expliqué ci-dessus ; le coefficient q est petit en même temps que τ.

Si l'on regarde τ_1 et τ_2 comme des quantités petites du premier ordre, il résulte du numéro précédent que P est une quantité finie entièrement connue ; Q est aussi une quantité finie, et q est du second ordre, mais ces deux coefficients ne sont connus que d'une façon approchée. Si pour calculer γ, γ_1, γ_2 on est parti d'éléments affectés d'une erreur d'ordre i, il est clair encore, d'après le n° 4, que l'erreur de Q sera de l'ordre $i+1$, ou même $i+2$ dans le cas spécial ; quant à l'erreur de q, elle est de l'ordre $i+3$ au moins ; on voit par suite que dans une première approximation on pourrait négliger entièrement q, puisque alors cette quantité est d'ordre égal ou supérieur à celui de l'erreur de Q.

Ceci montre bien que l'équation (20) fournira une valeur de ρ plus exacte que celle qui résulte des éléments déjà supposés connus, et, en première approximation, une valeur approchée dont l'erreur sera du premier ou même du second ordre : on a donc institué une méthode véritablement convergente d'approximations successives, car la suite des calculs ne vient en rien modifier ce résultat. C'est d'ailleurs, plus exactement, la petitesse des quantités $\tau_1 r^{-\frac{3}{2}}$, $\tau_2 r^{-\frac{3}{2}}$, et non celle des intervalles τ_1, τ_2 eux-mêmes, qui assure la convergence, ainsi que nous l'avons dit au paragraphe précédent. Et l'on voit encore que cette convergence sera plus ou moins rapide suivant les circonstances : en particulier, elle sera favorisée par la petitesse de $\tau_1+\tau_2$ relativement à τ_1 et τ_2, et aussi par celle de r'.

On résoudra l'équation (20) comme il a été dit au n° 5. Une fois la valeur de ρ obtenue, le calcul s'achève sans difficulté aucune par les équations (12), (13), (8), (7), en remplaçant d'abord r^3 par sa valeur correspondante dans les expressions de g, g_1, g_2, A, B données ci-dessus, et en calculant le mineur $\lambda\mu_1-\lambda_1\mu$. Quant à f_1 et f_2, on les obtient en les mettant comme g_1 et g_2 sous la forme indiquée à la fin du n° 3

$$f_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{r^3}, \qquad f_2 = 1 + \frac{\varphi_2}{r^3},$$

et en prenant pour φ_1, φ_2 les valeurs fournies par la solution approchée qui a déjà permis de calculer γ, γ_1, γ_2 ; en première approximation, on a simplement

$$(21) \qquad \varphi_1 = -\frac{\tau_1^2}{2}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\tau_2^2}{2}.$$

Il serait évidemment illusoire de chercher à dépasser la précision qu'on peut réellement atteindre dans la résolution de l'équation (20) ; si les coefficients de cette équation sont connus avec quatre chiffres significatifs, on ne peut pas compter sur une exactitude plus grande pour la valeur de ρ. Toutefois, il ne faut pas en conclure que les calculs subséquents ne doivent pas être conduits avec une précision supérieure à celle qu'on peut obtenir dans la détermination de ρ. Si l'on veut représenter les observations, c'est-à-dire vérifier les équations fondamentales du problème, avec une exactitude égale à celle des données, il faut, une fois qu'on a choisi une valeur de ρ vérifiant l'équation (20) autant que c'est possible, continuer les calculs avec une précision égale à celle des données, du moins quand on procède à la dernière approximation ; et c'est pour cela qu'on détermine ρ_2 et ρ_1 en se servant des équations (12) et (13), qui, pour une valeur donnée de ρ, permettent d'obtenir les meilleures déterminations des autres inconnues. Pour bien se convaincre de ce fait essentiel, il suffit de se reporter à la discussion élémentaire d'un système d'équations linéaires : si l'on est dans le cas d'indétermination simple, les inconnues sont, d'une façon générale, toutes indéterminées si l'on veut ; mais, quand on a fixé la valeur de l'une d'elles, les autres en résultent d'une façon précise ; et de même, si le déterminant des inconnues ne peut être calculé qu'avec une approximation relative inférieure à celle des coefficients, de sorte que les inconnues sont mal déterminées, il suffit en général de fixer l'une d'elles dans les limites de son incertitude, pour obtenir les autres et vérifier les équations avec une exactitude égale à celle des coefficients. C'est ce que rendent encore évident les considérations géométriques les plus simples.

La même observation s'applique à la détermination de ρ_2 et ρ_1 par les équations (12) et (13), et finalement à celle de x', y',

z' par les équations (7) ou (7 *bis*) : on y rencontre de nouvelles causes d'incertitude provenant pour ρ_2 et ρ_1 de la mauvaise détermination des coefficients de (12) et (13), A et B, en particulier ; et pour x', y', z', de la petitesse relative des différences telle que $f_1x_2 - f_2x_1$. Toutefois cette nouvelle incertitude sera beaucoup moindre que celle qui affecte la détermination de ρ.

En résumé, il faut dire, pour être dans la vérité, que le problème proposé de la détermination d'une orbite, dans les conditions où nous nous sommes placés, admet une infinité de solutions comprises entre certaines limites qui correspondent à l'incertitude de ρ principalement, mais aussi à celle de x', y', z', et que toutes ces solutions représentent les observations avec l'exactitude même qu'on leur suppose : cette incertitude, plus ou moins grande suivant le cas, est inévitable. On obtient finalement non pas les éléments de l'orbite cherchée, mais les éléments d'une orbite correspondant aux données, dans la mesure de leur exactitude supposée ; et, pour répondre complètement à la question posée, il conviendrait même d'indiquer dans quelles limites on peut faire varier la solution.

Il est à peine utile d'ajouter que l'incertitude est encore augmentée, dans une plus ou moins large mesure, du fait que les observations sont affectées d'erreurs inévitables.

Quand on a obtenu les valeurs de x, y, z, x', y', z', on peut déterminer les éléments comme nous l'avons dit au n° 1, si du moins l'on présume que le calcul ne doit pas être recommencé. On peut aussi employer, si l'on veut, la méthode de Gauss expliquée au n° 2, en laissant alors de côté la détermination de x', y', z' : mais les calculs sont moins simples.

Quand on procède à la première approximation, en dehors de tout autre renseignement, il est inutile d'apporter une grande exactitude aux calculs qui dépendent de la détermination de ρ, puisqu'il est nécessaire de recommencer en corrigeant d'abord les dates d'observation par les formules (3) ; et quand même ces corrections seraient sujettes à de légères rectifications après une nouvelle approximation, on pourra regarder les valeurs corrigées des intervalles de temps τ, τ_1, τ_2 comme exactes, puisque, d'après le numéro précédent, les différences $\rho_1 - \rho$, $\rho_2 - \rho$ se trouvent connues avec une approximation du second

ordre par rapport à τ_1, τ_2, ou même du troisième ordre quand les observations sont sensiblement équidistantes, ainsi qu'il arrive d'habitude.

Quand on doit procéder à une nouvelle approximation en recommençant le calcul, on se servira, pour obtenir les nouvelles valeurs de γ, γ_1, γ_2, φ_1, φ_2, des résultats de l'approximation précédente, et l'on voit, d'après le n° 3, qu'il suffira de déterminer, outre r, r_1, r_2, les deux éléments a et p pour lesquels on a

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r}-(x'^2+y'^2+z'^2), \quad p=r^2(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2.$$

Si l'on retrouve, à des différences négligeables près, les valeurs de g, g_1, g_2, f_1, f_2 précédemment employées, c'est qu'il n'y a pas lieu de recommencer le calcul, et l'on peut procéder à la détermination définitive des éléments.

10. Quand l'astre observé est une comète, il arrive le plus souvent que la première approximation donne pour le demi-grand axe a une valeur très grande. Si l'on juge alors, d'après les limites d'incertitude indiquées pour la solution, qu'il est possible de déterminer une orbite rigoureusement parabolique représentant les observations avec une exactitude suffisante, il y aura avantage à faire effectivement cette détermination. On peut, à cet effet, employer la méthode générale suivante, qui s'applique encore si l'incertitude de la solution primitive est telle qu'on ne puisse même pas déterminer une orbite approchée, ou bien si l'on veut *a priori* calculer une orbite parabolique, ce qu'on ne devrait pas faire sans en avoir reconnu la légitimité.

Reprenons les équations (12) et (13 *bis*), en supposant toujours que le mineur $\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1$ soit relativement bien déterminé ; dans le cas contraire, on les remplacerait par deux autres analogues. Mettant pour A et B leurs valeurs $X'+\frac{X''}{r^3}$, $Y'+\frac{Y''}{r^3}$, indiquées précédemment, on a

$$g_2\rho_1=a_1g\rho+b_1+\frac{c_1}{r^3}, \quad g_1\rho_2=a_2g\rho+b_2+\frac{c_2}{r^3},$$

en faisant

$$a_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda\mu_2 - \lambda_2\mu, \qquad a_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu,$$
$$b_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda_2 Y' - \mu_2 X', \qquad b_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda_1 Y' - \mu_1 X',$$
$$c_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda_2 Y'' - \mu_2 X'', \qquad c_2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = \lambda_1 Y'' - \mu_1 X''.$$

Portant ces valeurs dans les équations (7 *bis*), il vient

$$x' = \xi\rho + \xi' + \frac{\xi''}{r^3}, \qquad y' = \eta\rho + \eta' + \frac{\eta''}{r^3}, \qquad z' = \zeta\rho + \zeta' + \frac{\zeta''}{r^3},$$

en posant

$$\xi = \frac{f_1}{g_1}\lambda_2 a_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 a_1,$$
$$\xi' = \frac{1}{g}\left(f_2 X_1 - f_1 X_2 + \frac{f_1}{g_1}\lambda_2 b_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 b_1\right),$$
$$\xi'' = \frac{1}{g}\left(\frac{f_1}{g_1}\lambda_2 c_2 - \frac{f_2}{g_2}\lambda_1 c_1\right),$$

et déterminant de même η, η', η'', ζ, ζ', ζ''.

De plus, on a toujours

$$x = \lambda\rho - X, \qquad y = \mu\rho - Y, \qquad z = \nu\rho - Z,$$

et

$$r^2 = \rho^2 + 2S\rho + R^2.$$

L'orbite qui correspond aux valeurs x, y, z, x', y', z', résultant du choix d'une valeur de ρ, sera une parabole sous la condition

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{1}{r} = 0.$$

Il faut donc déterminer ρ par la résolution de cette équation : c'est facile en réalité, puisque, en général, on connaît déjà une valeur approchée de ρ qui permettra de calculer x', y', z', r et, par suite, $f(\rho)$: on appliquera ensuite la méthode d'approximation de Newton, en calculant la dérivée $f'(\rho)$ par la formule

$$f(\rho) = x'\xi + y'\eta + z'\zeta + \frac{\rho + S}{r^3}\left(1 - 3\,\frac{x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta''}{r^2}\right).$$

Connaissant ρ, on a immédiatement x, y, z, x', y', z' et, par suite, les éléments de l'orbite ; on a aussi ρ_1, ρ_2, d'où résultent x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2.

Il est facile de s'assurer qu'en regardant toujours τ_1 et τ_2 comme de petites quantités du premier ordre, les coefficients ξ, ξ', ξ'', ... sont tous des quantités finies; et de plus, si l'on part d'éléments connus avec une erreur d'ordre i, et qu'on emploie les valeurs de g, g_1, g_2, f_1, f_2, qui en résultent, en même temps que celles de γ, γ_1, γ_2 nécessaires au calcul de X″, Y″, Z″, l'erreur sur ξ, ξ', ξ'', ... sera d'ordre $i+1$, et même, par simple raison de symétrie, de l'ordre $i+2$ dans le cas spécial où la somme $\tau_1 + \tau_2$ peut être regardée comme du second ordre. Par suite, les conditions requises pour instituer une méthode convergente d'approximations successives sont bien vérifiées. Si l'on fait une première approximation en dehors de tout autre renseignement, on prendra simplement

$$g = \tau, \quad g_1 = \tau_1, \quad g_2 = \tau_2, \quad f_1 = f_2 = 1,$$
$$\gamma = -\frac{\tau^3}{6}, \quad \gamma_1 = -\frac{\tau_1^3}{6}, \quad \gamma_2 = -\frac{\tau_2^3}{6}.$$

Une fois les approximations successives terminées, il est clair, d'après la marche suivie, qu'en partant de l'orbite déterminée par x, y, z, x', y', z', on vérifiera nécessairement toutes les quinze équations fondamentales du problème, sauf les deux équations

$$z_1 = f_1 z + g_1 z', \qquad z_2 = f_2 z + g_2 z',$$

qu'on a fait intervenir seulement par la combinaison

$$f_1 z_2 - f_2 z_1 = g z'.$$

En d'autres termes, les ascensions droites observées seront exactement représentées, ainsi que la déclinaison de l'observation moyenne; quant aux déclinaisons des observations extrêmes, on ne les trouvera qu'affectées d'une erreur sensiblement la même pour les deux, si du moins la solution parabolique ne correspond pas exactement aux données. Bien entendu, si les équations qui déterminent ρ_1 et ρ_2, ou bien si les axes de coordonnées viennent à être modifiés, il faudra faire subir au langage précédent les modifications correspondantes.

Si l'on ne veut pas s'astreindre à représenter les observations de la façon parfaitement définie que nous venons de dire, et

c'est en réalité inutile, on peut, en général, simplifier notablement les calculs de la façon suivante. L'équation (11), de la forme

$$g\rho\Delta = D' + \frac{D''}{r^3},$$

permet d'éliminer $\frac{1}{r^3}$ dans les expressions données ci-dessus de ρ_1 et ρ_2, qui deviennent alors simplement

$$g_2\rho_1 = a'_1 g\rho + b_1', \qquad g_1\rho_2 = a'_2 g\rho + b'_2,$$

en faisant

$$a'_1 = a_1 + c_1\frac{\Delta}{D''}, \qquad a'_2 = a_2 + c_2\frac{\Delta}{D''},$$

$$b'_1 = b_1 - c_1\frac{D'}{D''}, \qquad b'_2 = b_2 - c_2\frac{D'}{D''}.$$

Les coefficients b'_1 et b'_2 sont d'ailleurs extrêmement petits, puisque les équations du problème doivent être très sensiblement vérifiées quand on y fait $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 0$; cela résulte, au surplus, de ce que X'', Y'', Z'', D'' diffèrent très peu de $-X'R^3$, $-Y'R^3$, $-Z'R^3$, $-D'R^3$. Le calcul se continue ensuite de la même façon, en remplaçant a_1, a_2, b_1, b_2 par a'_1, a'_2, b'_1, b'_2, et en supprimant c_1 et c_2, de sorte que ξ'', η'', ζ'' n'existent plus.

En posant

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = G, \qquad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = H, \qquad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = K,$$

l'équation en ρ devient, si l'on préfère cette forme,

$$f(\rho) = \frac{1}{2}(G\rho^2 + 2H\rho + K) - \frac{1}{r} = 0,$$

et, rendue entière, serait du sixième degré. L'expression de la dérivée de $f(\rho)$ est

$$f'(\rho) = G\rho + H + \frac{\rho + S}{r^2}.$$

Cette méthode plus simple cesse d'être utilisable si l'incertitude que l'on rencontre dans le calcul de D'' devient trop considérable. Quand on l'applique, l'observation moyenne est seule exactement représentée; les deux autres le sont plus ou moins bien, suivant que la solution parabolique correspond plus ou moins exactement aux données.

11. Lorsque, dans le cas général, il devient impossible de calculer ρ par l'équation (20), en raison de la trop mauvaise détermination des coefficients, il est nécessaire d'avoir recours à une quatrième observation, ainsi qu'on le voit immédiatement dans le cas limite où l'orbite de l'astre observé se trouve précisément dans le plan de l'écliptique.

Indiquons brièvement comment on peut diriger le calcul dans ces conditions exceptionnelles, assez rares en réalité.

Soit t'_1 la date d'une quatrième observation : nous conserverons toutes les notations précédentes pour les quantités qui dépendent des trois dates t, t_1, t_2, et nous marquerons d'un accent les quantités analogues qui dépendent de t, t'_1, t_2, de sorte qu'on aura par exemple

$$\tau'_1 = k(t'_1 - t), \qquad \tau' = \tau_2 - \tau'_1 = k(t_2 - t'_1),$$
$$x'_1 = \lambda'_1 \rho'_1 - X'_1 = f'_1 x + g'_1 x', \qquad \dots,$$
$$g' = f'_1 g_2 - f_2 g'_1 ;$$

toutefois, afin d'éviter toute confusion, nous introduirons une légère modification dans les notations, en écrivant, au lieu de X′, X″, ...

$$X^{(1)} = \tau X - \tau_2 X_1 + \tau_1 X_2, \qquad X^{(2)} = \gamma X - \gamma_2 X_1 + \gamma_1 X_2, \qquad \dots$$

et, par suite,

$$X'^{(1)} = \tau' X - \tau_2 X'_1 + \tau'_1 X_2, \quad X'^{(2)} = \gamma' X - \gamma_2 X'_1 + \gamma'_1 X_2, \quad \dots.$$

Reprenant alors l'équation (12) qui s'écrit

$$\rho_2(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)\left(\tau_1 + \frac{\gamma_1}{r^3}\right) = \rho(\lambda \mu_1 - \lambda_1 \mu)\left(\tau + \frac{\gamma}{r^3}\right)$$
$$+ \lambda_1\left(Y^{(1)} + \frac{Y^{(2)}}{r^3}\right) - \mu_1\left(X^{(1)} + \frac{X^{(2)}}{r^3}\right),$$

c'est-à-dire

$$\rho_2 = a\rho + b + \frac{c}{r^3} + \frac{d\rho}{r^3} + \frac{d_2 \rho_2}{r^3},$$

sans qu'il soit nécessaire de détailler les valeurs évidentes des coefficients a, b, c, d, d_2 ; a et b sont exactement connus, tandis que c, d, d_2 ne le sont qu'avec une certaine approximation, celle de γ, γ_1, γ_2 ; si les intervalles de temps sont regardés comme de petites quantités du premier ordre, a est une quan-

tité finie, b et c sont du premier ordre, d et d_2 sont du second ordre.

La combinaison des observations faites aux dates t, t'_1, t_2 donne une équation toute semblable

$$\rho_2 = a'\rho + b' + \frac{c'}{r^3} + \frac{d'\rho}{r^3} + \frac{d'_2\rho_2}{r^3};$$

en égalant les deux valeurs de ρ_2, on a une équation propre à déterminer ρ; elle est toujours du même type (20), sauf qu'il y figure un petit terme en $\frac{\rho_2}{r^3}$; mais ce terme peut être remplacé sans inconvénient par une valeur approchée, choisie suivant les circonstances; si les intervalles de temps sont petits, on peut prendre par exemple en première approximation $\rho_2 = \rho$.

Il est inutile de décrire plus amplement le détail des approximations successives. Connaissant ρ et ρ_2, on aura ρ_1, ρ'_1 comme précédemment et x, y, z, x_2, y_2, z_2, ..., par les équations (8), ici au nombre de douze.

Considérant maintenant les équations (5) au nombre de neuf, on pourra déterminer x', y', z' par les relations

$$g_2 x' = x_2 - f_2 x, \quad \ldots,$$

et des six équations restantes, celles relatives aux coordonnées x_1, y_1, x'_1, y'_1, seront nécessairement vérifiées, d'après la façon dont on a choisi les équations en ρ et ρ_2, tandis que les deux relations

$$z_1 = f_1 z + g_1 z', \qquad z'_1 = f'_1 z + g'_1 z',$$

qu'on n'a pas fait intervenir, ne seront vérifiées que dans la mesure où les équations données sont réellement concordantes.

En d'autres termes, les ascensions droites (si le plan fondamental est celui de l'équateur) seront toutes exactement représentées, ainsi que les déclinaisons relatives aux époques t et t_2. On disposera de l'arrangement des dates de la façon qui paraîtra présenter le plus d'avantages.

NOTE SUR LE CALENDRIER

—

Calendrier Julien. — Le calendrier julien est dans ses grandes lignes la continuation du calendrier romain, réformé par Jules César. Cependant, les chrétiens en ont fixé l'origine au 1er Janvier de l'année qui a suivi, selon les traditions, la naissance de Jésus Christ, soit 45 ans après la réforme julienne : c'est l'année 1 de l'ère chrétienne ou vulgaire.

La longueur moyenne de l'année (365j6h), sa division en 12 mois, la distribution de ceux-ci, ainsi que le nombre de jours qu'ils renferment, sont restés les mêmes que dans le calendrier de Jules César.

Pour tenir compte de la fraction de jour qui figure dans la longueur moyenne de l'année, trois années *communes* de 365 jours sont suivies régulièrement d'une année *bissextile* de 366 jours.

Le jour intercalaire, ou complémentaire, est ajouté au mois de Février qui compte alors 29 jours : c'est naturellement le 29 Février. Cependant, dans le calendrier romain, comme dans le calendrier ecclésiastique, qui en dérive, les jours sont encore désignés par d'autres caractéristiques que leur date dans le mois ; dans les années bissextiles, les caractéristiques ordinaires des 24, 25, 26, 27, 28 Février sont transportées aux 25, 26, 27, 28, 29, de sorte que le 24 et le 25 ont les mêmes caractéristiques, et c'est le 24 qui apparait alors comme étant le véritable jour intercalaire : c'est ainsi qu'étant désigné d'habitude sous le nom de *sexto die ante calendas martias*, il devient *bis sexto ante calendas*, ce qui explique l'origine du mot bissextile.

Les années bissextiles sont celles dont le millésime est un nombre divisible par 4 : il est nécessaire et suffisant pour cela qu'il en soit ainsi du nombre formé par les deux derniers chiffres du millésime.

Calendrier grégorien. — En réalité, l'année tropique, c'est-à-dire la valeur moyenne de l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du Soleil à l'équinoxe de printemps, est un peu plus courte que l'année julienne, de 11 minutes environ. Sa longueur actuelle est en effet de $365^j 5^h 48^m 46^s$; elle diminue d'ailleurs d'une demi-seconde par siècle.

Il en résulte que le commencement de l'année julienne retarde progressivement sur celui de l'année tropique correspondante, de 3 jours en 400 ans à très peu près. Si donc on veut conserver à l'année son caractère solaire, c'est-à-dire faire en sorte que les mêmes saisons reviennent toujours aux mêmes époques de l'année, et en particulier que l'équinoxe du printemps se produise toujours aux environs immédiats du 21 mars, il est nécessaire d'apporter une correction au calendrier julien. Cette date du 21 mars a été fixée par le concile de Nicée, parce qu'elle était effectivement à cette époque la date moyenne de l'équinoxe de printemps.

La réforme grégorienne, ordonnée en 1582 par le pape Grégoire XIII, a eu pour premier objet de rétablir l'accord entre le calendrier et le mouvement du Soleil.

Le retard de l'année julienne était à cette époque de dix jours environ : pour le faire disparaître, le pape décréta la suppression de dix jours dans le calendrier, de sorte que le jeudi 4 octobre 1582 fut immédiatement suivi à Rome du vendredi 15 Octobre, l'ordre de succession des jours de la semaine n'étant pas altéré.

De plus, l'intercalation julienne produisant un excès d'environ 3 jours en 400 ans, il fut décidé, pour maintenir perpétuellement l'accord entre le calendrier et le Soleil, de rendre communes trois années séculaires sur quatre : on ne conserve plus comme bissextiles que les années séculaires 1600, 2000, 2400..., dont le millésime, divisé par 100, reste un nombre divisible par 4.

Par suite de cette règle, quatre siècles grégoriens renferment un nombre de jours égal à

$$365,25 \times 400 - 3 = 146097,$$

de sorte que la longueur moyenne de l'année grégorienne est de $365^j,2425$ ou $365^j 5^h 49^m 12^s$.

Le calendrier grégorien est adopté actuellement d'une façon universelle, au moins pour la vie civile : cependant les peuples chrétiens qui se rattachent à l'église grecque orthodoxe ont conservé l'usage du calendrier julien pour la vie religieuse.

La date grégorienne (nouveau style) d'un jour donné surpasse la date julienne (vieux style) du même jour, d'un nombre de jours qui augmente d'une unité chaque fois que l'on passe du 28 Février au 1[er] mars d'une année séculaire non bissextile : ce nombre est donc 13 depuis le 1[er] mars 1900 jusqu'au 28 Février 2100 (nouveau style).

Chronologie. — Pour fixer les dates, soit en chronologie, soit dans la construction des tables astronomiques, on fait toujours usage (à moins d'indication contraire) du calendrier grégorien à partir du 15 Octobre 1582 (5 Octobre julien). Avant cette époque, on fait usage du calendrier julien, que l'on peut prolonger en arrière indéfiniment.

On désigne alors les dates, comme l'on sait, par le numéro de l'année correspondante avant ou après la naissance de J.-C. Afin de rendre les formules générales, on peut affecter du signe — les millésimes des années avant J.-C., mais il faut alors avoir soin de diminuer d'une unité la valeur absolue du millésime, de sorte que 753 avant J.-C., par exemple, devient — 752. C'est à la condition d'opérer ainsi que la règle relative aux années bissextiles conserve sa généralité : l'année que nous venons de citer est donc bissextile.

Pour mesurer de grands espaces de temps, on fait généralement usage de l'année julienne de 365^j25, ou plutôt du siècle julien, renfermant 100 années juliennes, soit 36525 jours.

Pour comparer des dates éloignées, on utilise encore avec avantage la *période julienne*, due à Joseph-Juste Scaliger. Pour des raisons expliquées plus loin, elle comprend 7980 années juliennes, et son origine est fixée au premier janvier de l'année julienne 4713 avant notre ère, ou — 4712 : ce jour est le jour *zéro* de la période julienne ; le lendemain en est le jour *un*, et ainsi de suite. On exprime alors les dates en jours de la période julienne, celle-ci étant assez étendue pour suffire à tous les

besoins pratiques, et pouvant d'ailleurs être recommencée dans les deux sens.

Le 1er Janvier de l'année julienne de millésime *m* est le jour *j* de la période julienne, si *j* est le nombre entier égal ou immédiatement supérieur au produit

$$365{,}25 \times (4712 + m).$$

C'est ainsi que le 1er Janvier 1925 (vieux style) est le jour 2 424 165 de la période julienne, et par suite le 1er janvier 1925 (nouveau style) en est le jour 2 424 152, ce qui veut dire encore que du 1er Janvier — 4712 au 1er Janvier de l'année grégorienne 1925, il s'est écoulé précisément 2 424 152 jours.

Eléments du comput. — Avec le calendrier de chaque année, il est d'usage de donner les éléments du comput pour cette année, c'est-à-dire la lettre dominicale, le cycle solaire, le nombre d'or, l'épacte et l'indiction romaine.

La détermination de la date de la fête de Pâques, qui est l'objet propre du comput, résulte de la lettre dominicale et du nombre d'or dans le calendrier julien, de la lettre dominicale et de l'épacte dans le calendrier grégorien ; les autres éléments du comput ne sont qu'accessoires.

L'introduction de l'épacte à la place du nombre d'or est le second point fondamental de la réforme grégorienne, instituée en vue de mettre perpétuellement d'accord les règles du comput avec les conditions astronomiques qui régissent la détermination de Pâques, d'après les décisions du concile de Nicée.

On devra d'ailleurs observer que les éléments et les principes du comput julien indiqués ci-dessous sont ceux en usage dans l'église d'Occident jusqu'en 1582, et depuis chez les chronologistes. Ils ne sont pas toujours identiques, surtout dans la forme, avec ceux employés encore maintenant dans l'église d'Orient, mais conduisent aux mêmes résultats pour la date de Pâques.

Lettre dominicale. — A chaque jour d'une année commune quelconque, faisons correspondre l'une des sept premières lettres de l'alphabet A, B, C, D, E, F, G, de façon que A

correspond au 1[er] Janvier, et que les lettres se suivent dans leur ordre naturel, en recommençant leur cycle quand il est épuisé. Les jours de l'année qui ont la même lettre ont aussi le même nom dans la semaine ; en particulier, les dimanches de l'année ont une même lettre, qui est la lettre dominicale de l'année.

Quand il s'agit d'une année bissextile, les règles sont un peu différentes. L'année est divisée en deux périodes, la première allant jusqu'au 24 Février inclus, la seconde commençant au 25 Février ; la disposition des lettres se fait dans chacune de ces périodes comme précédemment, mais la lettre du 24 Février est redoublée pour le 25, de telle façon qu'à partir du 1[er] mars, on retombe sur les mêmes lettres que dans une année commune. Il en résulte que c'est dans chacune de ces périodes seulement que la même lettre correspond au même jour de la semaine. Pour déterminer en particulier les dimanches, il faut donc faire usage de deux lettres : la première jusqu'au 24 Février inclus, la seconde ensuite, et il est clair que la première est celle qui suit la seconde dans l'ordre alphabétique.

Connaissant la lettre dominicale (ou les lettres dominicales) d'une année, le tableau I suivant indique la lettre qui correspond à chaque jour de la semaine. Il suffit d'y chercher la lettre qui est à l'intersection de la ligne ayant pour titre le nom du jour, et de la colonne qui commence par la lettre dominicale.

TABLEAU I

Dimanche	A	B	C	D	E	F	G
Lundi	B	C	D	E	F	G	A
Mardi	C	D	E	F	G	A	B
Mercredi	D	E	F	G	A	B	C
Jeudi	E	F	G	A	B	C	D
Vendredi	F	G	A	B	C	D	E
Samedi	G	A	B	C	D	E	F

Le tableau II montre la correspondance des lettres et des jours de l'année et constitue par suite avec le précédent un calendrier perpétuel.

Jour du mois	Janvier Octobre	Mai	Août	Février Mars Novembre	Juin	Septembre Décembre	Avril Juillet
1, 8, 15, 22, 29	A	B	C	D	E	F	G
2, 9, 16, 23, 30	B	C	D	E	F	G	A
3, 10, 17, 24 (25), 31	C	D	E	F	G	A	B
4, 11, 18, 25 (26)	D	E	F	G	A	B	C
5, 12, 19, 26 (27)	E	F	G	A	B	C	D
6, 13, 20, 27 (28)	F	G	A	B	C	D	E
7, 14, 21, 28 (29)	G	A	B	C	D	E	F

Les dates placées entre parenthèses se rapportent uniquement au mois de février des années bissextiles.

Les exemples suivants suffiront à faire comprendre l'usage de ces tableaux.

En 1924, année bissextile, les lettres dominicales sont FE ; par suite, le 1er Janvier est un mardi, puisque la lettre du 1er Janvier est A, que l'on retrouve dans le tableau I dans la colonne commençant par F, et dans la ligne du mardi ; de même le 14 Juillet est un lundi, puisque la lettre correspondante F se trouve dans le tableau I dans la colonne commençant par E et dans la ligne du lundi.

Tout ce qui précède s'applique indifféremment au calendrier julien et au calendrier grégorien. Mais, pour une même année, la lettre dominicale est différente dans les deux calendriers.

Pour déterminer d'une façon générale la lettre dominicale d'une année quelconque de millésime *m*, on peut employer une règle algébrique fort simple. Mais avant de l'indiquer, il faut préciser quelques conventions nécessaires ici et dans la suite.

Soient deux nombres entiers *a* et *b*, dont le second est positif, le premier n'étant pas soumis à cette restriction. Nous désignerons par $\left(\frac{a}{b}\right)$ et par $[a]_b$ les deux nombres entiers tels que

$$a = b \times \left(\frac{a}{b}\right) + [a]_b,$$

ondition que $[a]_b$ soit positif ou nul, inférieur à *b*. Si *a*

est positif ou nul, $\left(\frac{a}{b}\right)$ et $[a]_b$ sont le quotient et le reste de la division ordinaire de a par b. Si a est négatif, égal à $-a'$, appelons q' et r' le quotient et le reste de la division de a' par b ; si r' est nul, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right) = -q', \qquad [a]_b = 0 ;$$

dans le cas contraire,

$$\left(\frac{a}{b}\right) = -(q'+1), \qquad [a]_b = b - r'.$$

Dans tous les cas, s'il ne s'agit que de $[a]_b$, on peut toujours abréger le calcul en augmentant ou en diminuant a d'un multiple quelconque de b.

Si par exemple on met le millésime m d'une année quelconque sous la forme $100\,c + u$, u étant positif ou nul, inférieur à 100, on aura toujours

$$c = \left(\frac{m}{100}\right), \qquad u = [m]_{100} ;$$

c'est ainsi que

$$1925 = 19 \times 100 + 25, \qquad -700 = -7 \times 100 + 0,$$
$$-752 = -8 \times 100 + 48.$$

Convenons maintenant de désigner les différentes lettres A, B,..., G par les nombres 1, 2,..., 7 respectivement : et appelons alors λ la lettre dominicale de l'année m dans le calendrier julien, l cette même lettre dans le calendrier grégorien. On aura, l'année 1 commençant par un samedi,

$$\lambda = \left[3 - m - \left(\frac{m}{4}\right)\right]_7 = \left[c + 3 - u - \left(\frac{u}{4}\right)\right]_7$$
$$l = \left[2c + 1 - \left(\frac{c}{4}\right) - u - \left(\frac{u}{4}\right)\right]_7 ;$$

toutefois, si le calcul donne 0 pour λ ou l, on prendra 7 à la place. Si l'année m est bissextile, la formule donne la seconde lettre dominicale : la première s'obtient en ajoutant 1 ou retranchant 6.

La différence $c - 2 - \left(\frac{c}{4}\right)$ des deux nombres à divis-

pour obtenir respectivement l et λ, n'est autre chose que la différence entre les dates d'un même jour dans le calendrier grégorien et dans le calendrier julien, pendant toutes les années qui correspondent au même nombre c; toutefois, pour une année séculaire non bissextile, ce nombre est trop fort d'une unité pour les dates de janvier et février.

Pour $m = 1924$, les lettres dominicales sont GF dans le calendrier julien, FE dans le calendrier grégorien.

Pour $m = -4712$, les lettres dominicales sont GF, et le 1er Janvier, origine de la période julienne, est un lundi.

Cycle solaire. — Les années successives étant réparties en périodes de 28 ans, le rang s d'une année quelconque dans la période à laquelle elle appartient est le cycle solaire de cette année : l'origine des périodes est telle que l'an 1 de l'ère vulgaire ait 10 pour cycle solaire ; par suite, le cycle solaire de l'année m est

$$s = [m + 9]_{28},$$

en prenant toutefois $s = 28$, lorsque la formule donne $s = 0$.

Pour $m = 1924$, $s = 1$; pour $m = -4712$, $s = 1$.

Le cycle solaire est le même dans les deux calendriers julien et grégorien. Mais dans le calendrier julien, il est clair que deux années de même cycle solaire ont les mêmes lettres dominicales, car au bout de 28 ans, et seulement alors, les lettres dominicales se reproduisent régulièrement dans le même ordre, de sorte que cette période ramène les dimanches (ou jours du Soleil) aux mêmes dates dans l'année : c'est ce qui explique l'origine et le nom de cycle solaire.

En fonction de s, on a

$$\lambda = \left[- s - \left(\frac{s-1}{4} \right) \right]_7,$$

les années bissextiles correspondant au cas où $s - 1$ est divisible par 4. Dans le calendrier grégorien, les lettres dominicales ne se reproduisent d'une façon régulière que tous les 400 ans ; la période de 28 ans ne peut servir qu'entre deux [...]es séculaires non bissextiles successives, par exemple [...]o et 1900, entre 1900 et 2100.

Indiction romaine. — Les années successives étant réparties en périodes de 15 ans, le rang i d'une année quelconque dans la période à laquelle elle appartient est l'indiction de cette année ; l'origine des périodes est telle que l'an 1 ait 4 pour indiction, et par suite, pour l'année m,

$$i = [m + 3]_{15},$$

en prenant toutefois $i = 15$ lorsque la formule donne $i = 0$.

Pour $m = 1924$, $i = 7$; pour $m = -4712$, $i = 1$.

L'indiction servait autrefois à fixer les dates à Rome ; elle n'a aucun rapport direct avec le calendrier.

Nous venons de voir que l'année — 4712 avait pour cycle solaire 1, pour indiction 1, et nous allons vérifier dans un instant qu'elle a aussi pour nombre d'or 1. C'est précisément pour ces raisons qu'elle a été choisie par Scaliger comme origine de la période julienne. Le nombre d'années de cette période, 7980, est le produit des trois nombres 28, 15 et 19, périodes du cycle solaire, de l'indiction et du nombre d'or ; ces nombres étant premiers entre eux deux à deux, il y a dans la période julienne une année et une seule admettant des nombres donnés comme cycle solaire, indiction et nombre d'or.

Nombre d'or. — Les années successives étant réparties en périodes de 19 ans, le rang n d'une année quelconque dans la période à laquelle elle appartient, est le nombre d'or de cette année ; l'origine des périodes est telle que l'an 1 ait pour nombre d'or 2 ; et par suite, pour l'année m,

$$n = [m + 1]_{19},$$

en prenant toutefois $n = 19$, lorsque la formule donne $n = 0$.

Pour $m = 1924$, $n = 6$; pour $m = -4712$, $n = 1$.

La période de 19 ans est un cycle lunaire découvert, dit-on, par Méton. La durée de la révolution synodique de la Lune étant de $29^j,53059$, on voit que 235 lunaisons font $6939^j,69$, tandis que 19 années juliennes font $6939^j,75$: le cycle de Méton ramène donc très sensiblement les phases moyennes de la Lune aux mêmes dates de l'année julienne, sinon 19 ans, du moins en 76 ans, à cause des années bi-

l'emploi du cycle produit un retard d'un jour en un peu plus de 300 ans.

Dans le comput julien, on répartit les 235 lunaisons d'une période de 19 ans en 115 mois lunaires de 29 jours et 120 mois, de 30 jours, disposés à quelques exceptions près, de façon alternée, sans s'occuper des années bissextiles. Cela donne bien $115 \times 29 + 120 \times 30 = 6935$, nombre des jours contenus dans 19 années communes de 365 jours.

Quand il y a lieu d'ajouter un jour complémentaire en février, ce jour se redouble dans le mois lunaire correspondant qui comprend alors en réalité 30 ou même 31 jours, suivant le cas, mais qui est toujours considéré comme de 29 ou 30 jours.

Le tableau ci-contre montre comment sont disposés, dans le cycle de 19 ans, les différents mois lunaires; il donne pour les différentes années du cycle, marquées par leur nombre d'or, les dates ordinaires du commencement de chaque mois, ou comme on dit, du premier jour de la Lune, c'est-à-dire encore de la nouvelle Lune, suivant le comput.

Les dates en italique correspondent aux lunaisons de 30 jours; les exceptions dans l'alternance des mois de 29 ou de 30 jours sont choisies d'après des règles peu simples, dépourvues d'intérêt actuel. Les dates entre parenthèses sont spéciales pour les années bissextiles.

Les jours successifs d'un mois lunaire sont le 1er jour, le 2e jour, le 3e jour, ... de la Lune, et en ces jours, l'âge de la Lune est précisément 1, 2, 3, ...

Epacte. — Dans le calendrier grégorien, on appelle *épacte* d'une année quelconque l'âge de la Lune au 1er Janvier de cette année, diminué d'une unité (1); de sorte que l'épacte est un nombre qui peut *a priori* varier depuis 0 jusqu'à 29; quand elle est nulle, on la représente d'ordinaire par le signe *.

(1) L'épacte n'est pas toujours l'âge de la Lune au 31 Décembre de l'année [pré]cédente : il peut y avoir, d'après ce qui suit, une discontinuité d'un ou [deu]x jours, exceptionnellement.

Calendrier lunaire perpétuel julien

Nombre d'or	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1	23	21	23	21	21	19	19	17	16	15	14	13
2	12	10	12	10	10	8	8	6	5	4	3	2
3	1, 31	—	1, 31	29	29	27	27	25	24	23	22	21
4	20	18	20	18	18	16	16	14	13	12	11	10
5	9	7	9	7	7	5	5	3	2	2, 31	30	29
6	28	26 (27)	28	26	26	24	24	22	21	20	19	18
7	17	15	17	15	15	13	13	11	10	9	8	7
8	6	4	6	5	4	3	2	1, 30	29	28	27	26
9	25	23	25	23	23	21	21	19	18	17	16	15
10	14	12	14	12	12	10	10	8	7	6	5	4
11	3	2	3	2	1, 31	29	29	27	26	25	24	23
12	22	20	22	20	20	18	18	16	15	14	13	12
13	11	9	11	9	9	7	7	5	4	3	2	1, 31
14	30	28 (29)	30	28	28	26	26	24	23	22	21	20
15	19	17	19	17	17	15	15	13	12	11	10	9
16	8	6	8	6	6	4	4	2	1	1, 30	29	28
17	27	25 (26)	27	25	25	23	23	21	20	19	18	17
. . . . . .	16	14	16	14	14	12	12	10	9	8	7	6
. . . . .	5	3	5	4	3	2	1, 30	28	27	26	25	24

Nous étendrons cette définition au calendrier julien, et nous appellerons de même *épacte julienne* d'une année quelconque l'âge de la Lune (d'après le comput julien) au 1[er] Janvier de cette année, diminué d'une unité. Mais il faut observer que l'épacte julienne est en réalité étrangère au calendrier julien, et que, très souvent cette expression est prise dans d'autres sens.

D'après la disposition du calendrier lunaire julien, il est clair que l'épacte julienne ne peut prendre que 19 valeurs différentes, puisqu'elle se reproduit périodiquement avec le nombre d'or. Ce dernier variant de 1 à 19, l'épacte prend les valeurs successives 8, 19, 0, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, que l'on peut former en ajoutant successivement 11 au premier nombre 8, et en retranchant 30 de la somme ainsi formée toutes les fois que c'est possible; et l'on retrouve de même la valeur initiale 8, en ajoutant cette fois 12 au dernier nombre 26 et retranchant 30.

L'épacte julienne ε est fonction du nombre d'or, et l'on a

$$\varepsilon = [11n - 3]_{30} = [n + 10[n]_3 - 3]_{30}.$$

Pour 1924, $n = 6$, et par suite $\varepsilon = 3$.

Mais, en raison de la suppression de 3 jours en 400 ans dans le calendrier julien, en raison aussi de l'erreur du cycle lunaire de Méton, les auteurs de la réforme grégorienne ont été nécessairement amenés à regarder l'épacte comme pouvant prendre d'autres valeurs que celles qui viennent d'être indiquées. Toutefois, ils ont conservé l'usage général du cycle lunaire pendant de longues périodes d'années, les erreurs qui en résultent étant corrigées d'une façon discontinue, quand cela devient nécessaire, par un saut de l'épacte.

Prolongeons alors la série précédente des épactes suivant la même loi, jusqu'à ce qu'on revienne à la valeur initiale; on a la série de 30 épactes possibles, que l'on peut supposer répétée périodiquement,

8 19 0 11 22 3 14 25 6 17 28 9 20 1 12
23 4 15 26 7 18 29 10 21 2 13 24 5 16 27.....

le cycle de Méton restera en vigueur sans disconti-

nuité, les épactes prendront périodiquement 19 valeurs consécutives de la série précédente, prolongée s'il est nécessaire, correspondant aux nombres d'or successifs depuis 1 jusqu'à 19, par exemple 29, 10, 21, 2, 13, ..., 25, 6, 17, ainsi qu'il arrive depuis 1900 jusqu'à 2199.

Mais il faut alors modifier le calendrier lunaire et l'étendre. Le tableau de la page suivante montre comment, pour les épactes successives, rangées dans l'ordre précédent, ont été fixés les commencements des mois lunaires, ou nouvelles lunes, dans le comput grégorien. Comme plus haut, les dates en italique correspondent aux lunaisons de 30 jours; les dates entre parenthèses sont spéciales aux années bissextiles; les dates entre crochets du mois de décembre sont celles qui conviennent au cas où l'année envisagée est la dernière du cycle de Méton, c'est-à-dire correspond au nombre d'or 19.

Pour assurer de la meilleure façon la distribution des mois de 29 et 30 jours, on a encore été conduit à employer deux épactes 25, que l'on distingue en écrivant la seconde en caractères différents, **25** par exemple : cette épacte supplémentaire est employée à la place de 25, toutes les fois que pour l'année correspondante le nombre d'or est supérieur à 11.

Les 19 premières lignes du calendrier lunaire grégorien (**25** non compris) forment naturellement un tableau qui ne présente que de très légères différences avec le calendrier lunaire julien.

Pour corriger l'épacte julienne de l'année de la réforme 1582, soit 3, il a d'abord fallu en retrancher 10 jours, en raison de la suppression de 10 jours dans le calendrier; d'autre part, pour tenir compte de l'erreur du cycle de Méton, et ramener avec une exactitude suffisante l'accord entre la lune fictive du comput et la lune astronomique, on a ajouté 3 jours, ce qui a donné l'épacte 26. A partir de 1582, la différence entre l'épacte grégorienne e et l'épacte julienne ε est donc 23, à 30 près bien entendu.

Pour maintenir perpétuellement ensuite l'accord ainsi obtenu, on applique les deux règles suivantes.

1° A chaque année séculaire non bissextile, on retranc[h]e [1] jour à l'épacte : c'est l'*équation solaire* de l'épacte.

Calendrier lunaire perpétuel grégorien

.e	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
8	23	*21*	23	*21*	21	*19*	19	*17*	16	*15*	14	*13* [13]
19	12	*10*	12	*10*	10	*8*	8	*6*	5	*4*	3	*2* [2, *31*]
0	*1*, 31	—	*1*, 31	*29*	29	*27*	27	*25*	24	*23*	22	*21* [21]
11	20	*18*	20	*18*	18	*16*	16	*14*	13	*12*	11	*10* [10]
22	9	*7*	9	*7*	7	*5*	5	*3*	2	*1*, 31	*29*	*29* [29]
3	28	*26* (*27*)	28	*26*	26	*24*	24	*22*	21	*20*	19	*18* [10]
14	17	*15*	17	*15*	15	*13*	13	*11*	10	*9*	8	*7* [7]
25	*6*	5	*6*	5	*4*	3	*2*	1, *30*	29	*28*	27	*26* [26]
25	6	*4*	6	*4*	4	*2*	2, *31*	30	*28*	28	*26*	*26* [26]
6	25	*23*	25	*23*	23	*21*	21	*19*	18	*17*	16	*15* [15]
17	14	*12*	14	*12*	12	*10*	10	*8*	7	*6*	5	*4* [4]
28	*3*	2	*3*	2	*1*, 31	*29*	29	*27*	26	*25*	24	*23* [23]
9	22	*20*	22	*20*	20	*18*	18	*16*	15	*14*	13	*12* [12]
20	11	*9*	11	*9*	9	*7*	7	*5*	4	*3*	2	*1*, *31* [*1*, 31]
1	30	*28* (*29*)	30	*28*	28	*26*	26	*24*	23	*22*	21	*20* [20]
12	19	*17*	19	*17*	17	*15*	15	*13*	12	*11*	10	*9* [9]
23	8	*6*	8	*6*	6	*4*	4	*2*	1, *30*	30	*28*	*28* [28]
4	27	*25* (*26*)	27	*25*	25	*23*	23	*21*	20	*19*	18	*17* [17]
15	16	*14*	16	*14*	14	*12*	12	*10*	9	*8*	7	*6* [6]
26	*5*	4	*5*	4	*3*	2	*1*, 31	*29*	28	*27*	26	*25* [25]
7	24	*22*	24	*22*	22	*20*	20	*18*	17	*16*	15	*14* [14]
18	13	*11*	13	*11*	11	*9*	9	*7*	6	*5*	4	*3* [3]
29	*2*	1	*2*	1, *30*	30	*28*	28	*26*	25	*24*	23	*22* [22]
10	21	*19*	21	*19*	19	*17*	17	*15*	14	*13*	12	*11* [11]
21	10	*8*	10	*8*	8	*6*	6	*4*	3	*2*	1, *30*	*30* [30]
2	29	*27* (*28*)	29	*27*	27	*25*	25	*23*	22	21	20	*19* [19]
13	18	*16*	18	*16*	16	*14*	14	*12*	11	*10*	9	*8* [8]
24	7	*5*	7	*5*	5	*3*	3	*1*, 31	*29*	29	*27*	*27* [27]
5	26	*24* (*25*)	26	*24*	24	*22*	22	*20*	19	*18*	17	*16* [16]
16	15	*13*	15	*13*	13	*11*	11	*9*	8	*7*	6	*5* [5]
27	*4*	3	*4*	3	*2*	1, *30*	30	*28*	27	*26*	25	*24* [24]

2° Tous les 300 ans, quand on arrive à une année séculaire, on ajoute un jour à l'épacte, pour corriger l'erreur du cycle de Méton ; et pour plus d'exactitude, quand on a fait 7 fois de suite cette addition, la suivante ne se fait que 400 ans après ; puis on recommence de la même façon : c'est l'*équation lunaire* de l'épacte, qui est en somme de 8 jours en 2500 ans ; appliquée en 1800 d'abord, puis 7 fois de suite à partir de 1800, tous les 300 ans, jusqu'en 3900, elle n'est plus appliquée qu'en 4300, après quoi on recommence de même.

Il en résulte que la différence entre les deux épactes grégorienne et julienne, $e - \varepsilon$, après avoir été 23 (à 30 près) jusqu'en 1700 exclusivement, a été 22 de 1700 à 1900, et est actuellement 21 jusqu'en 2200 (exclusivement).

D'une façon générale, l'épacte grégorienne est donnée pour l'année de millésime m et de nombre d'or n par la formule

$$e = \left[n + 10\,[n]_3 - 3 - c + \left(\frac{c}{4}\right) + \left(\frac{8c + 13}{25}\right) \right]_{30};$$

depuis 1900 jusqu'à 2200, on a plus simplement

$$e = [n + 10\,[n]_3 - 12]_{30}.$$

Pour $m = 1924$, $n = 6$, $e = 24$.

Au bout de 100 siècles grégoriens, les équations tant solaire que lunaire de l'épacte se reproduiraient dans le même ordre, et pour un même nombre d'or, l'épacte aurait augmenté de 17 (ou diminué de 13) ; on pourrait en conclure que l'épacte ne reprendrait périodiquement les mêmes valeurs qu'après 3000 siècles pour un même nombre d'or, c'est-à-dire après 57000 siècles en réalité : mais ces considérations sont dénuées de toute valeur comme de toute utilité, puisque l'accord du calendrier avec le Soleil et la Lune ne peut se maintenir suffisamment exact que pendant quelques milliers d'années.

Fête de Pâques. — D'après les règles confirmées par le concile de Nicée, la fête de Pâques doit être célébrée le premier dimanche postérieur au 14ᵉ jour de la Lune qui tombe d'après le comput, à l'équinoxe de printemps, fixé au 21 M[illegible] ou immédiatement après.

Les lunaisons dont le 14e jour tombe le 21 Mars ou immédiatement après, sont celles dont le commencement a lieu le Mars au plus tôt, le 5 Avril au plus tard ; elles sont toutes de 29 jours (sauf pour les épactes 24 et **25**) : ce sont les lunes pascales.

Si la lune pascale commence le 8 Mars (épacte 23, ou nombre d'or 16, suivant le calendrier grégorien ou julien), le 14e jour de la Lune est le 21 Mars, et Pâques tombe le 22 Mars, si ce jour est un dimanche, c'est-à-dire si la lettre dominicale est D : c'est sa première limite.

Si la lune pascale commence le 5 avril (épacte 24 ou 25, ou bien nombre d'or 8, suivant le calendrier), le 14e jour de la Lune est le 18 Avril, et si ce jour est un dimanche, c'est-à-dire si la lettre dominicale est C, Pâques tombe le 25 Avril : c'est sa dernière limite.

La date de la fête de Pâques pour une année quelconque dépend uniquement de la lettre dominicale et de l'épacte (ou nombre d'or, dans le calendrier julien). Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre des deux calendriers, la date P de Pâques, exprimée en jours de Mars, est donnée par la formule

$$P = 45 - E + [E + L + 1]_7,$$

où l'on prend pour E l'épacte julienne ou grégorienne elle-même, si elle est inférieure à 24, et cette épacte diminuée de 30, si elle est supérieure à 23, et pour L le nombre qui désigne la lettre dominicale, julienne ou grégorienne ; dans les années bissextiles, c'est, bien entendu, de la seconde lettre dominicale qu'il s'agit ici. De plus, et par exception, il faut, si l'épacte est 24, faire comme si elle était 25, et par suite, prendre $E = -5$; et si l'épacte est **25**, il faut faire comme si elle était 26, et par suite prendre $E = -4$. Ces deux exceptions sont propres au calendrier grégorien, car les épactes 24 et **25** n'existent pas dans le calendrier julien. En fait, on peut ajouter que le changement d'épacte indiqué dans ces deux exceptions n'est nécessaire dans le premier cas qu'avec la lettre dominicale D, dans le second cas avec la lettre C.

Lorsque P dépasse 31, la différence P — 31 donne la date en jours d'Avril.

Pour 1924, on a $e = 24$, $L = 5$; donc $P = 51$; Pâques est le 20 Avril.

Pour la même année julienne, $\varepsilon = 3$, $L = 6$; donc $P = 45$; Pâques est le 14 Avril (vieux style), et le 27 Avril (nouveau style).

La lune pascale commence le 5 Avril dans le calendrier grégorien, le 28 Mars (vieux style) et par suite le 10 Avril (nouveau style) dans le calendrier julien : en réalité, la nouvelle lune astronomique a lieu le 4 Avril. La lune du comput julien retarde de 5 jours sur celle du comput grégorien, et celle-ci retarde elle-même d'un jour sur la lune astronomique. Ce dernier retard est en réalité voulu, car, pour diverses raisons, on entend plutôt par premier jour de la Lune, dans le comput, non pas le jour même de la conjonction de cet astre avec le Soleil, mais le lendemain de cette conjonction.

La date de Pâques se reproduit périodiquement dans le calendrier julien après 19 × 28 ou 532 ans, puisqu'alors le nombre d'or et la lettre dominicale se reproduisent.

Dans le calendrier grégorien, il n'y a rien de pareil : le cycle pascal serait le même que celui des épactes, 57000 siècles, si cela avait un sens.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

ASTRONOMIE THÉORIQUE

LIVRE PREMIER

THÉORIES ANALYTIQUES

CHAPITRE PREMIER

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

CHAPITRE II

QUELQUES DÉVELOPPEME

CHAPITRE III

ONNÉES ET PROBLÈMES RELATIFS AUX COORDONNÉES

LIVRE II

LA TERRE. — COORDONNÉES ASTRONOMIQUES RÉDUCTION DES OBSERVATIONS

CHAPITRE IV

LA TERRE

CHAPITRE V

.ORDONNÉES ASTRONOMIQUES — TEMPS

CHAPITRE VI

MOUVEMENT DIURNE

CHAPITRE VII

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE

CHAPITRE VIII

PARALLAXE

CHAPITRE IX

ABERRATION

LIVRE III

MOUVEMENT DES CORPS CÉLESTES DÉPLACEMENT DES PLANS FONDAMENTAUX

—

CHAPITRE X

DE MÉCANIQUE CÉLESTE

CHAPITRE XI

PRÉCESSION ET NUTATION

CHAPITRE XII

POSITIONS APPARENTES DES ASTRES

CHAPITRE XIII

MOUVEMENT DU SOLEIL — TEMPS

CHAPITRE XIV

MOUVEMENT GÉOCENTRIQUE DES PLANÈTES

CHAPITRE XV

MOUVEMENT DE LA LUNE ET DES SATELLITES

LIVRE IV

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉCLIPSES

CHAPITRE XVI

ÉCLIPSES DE LUNE

CHAPITRE XVII

ÉCLIPSES DE SOLEIL

CHAPITRE XVIII

OCCULTATIONS D'ÉTOILES PAR LA LUNE

CHAPITRE XIX

PASSAGES DE MERCURE ET DE VÉNUS SUR LE SOLEIL

CHAPITRE COMPLÉMENTAIRE

DÉTERMINATION D'UNE ORBITE KÉPLÉRIENNE PAR TROIS OBSERVATIONS RAPPROCHÉES

NOTE SUR LE CALENDRIER